

# EXPRESSÃO MATEMÁTICA DA SUPERPOSIÇÃO SEQUENCIAL DE DEFORMAÇÕES EM DUAS DIMENSÕES

A.P.Fiori

**PALAVRAS-CHAVE:** deformação, modelagem matemática, geologia estrutural.

FIORI, A.P. (1994) Expressão matemática da superposição sequencial de deformações em duas dimensões. *Bol.IG-USP, Sér. Cient.*, 25:1-16.

## RESUMO

Neste trabalho é apresentada, de maneira simplificada, a teoria da superposição bi-dimensional de deformação, do ponto de vista quantitativo. Quatro modelos básicos são enfocados: rotação, cisalhamento simples, cisalhamento puro e mudanças de área. Possivelmente, na natureza, as deformações resultam de combinação de dois ou mais desses modelos.

Cada modelo é descrito por uma matriz, e as deformações superpostas são analisadas pela adequada multiplicação de matrizes. O estado finito de deformação de uma rocha é descrito pela matriz de deformação total, e a partir desta, diversas equações úteis em geologia são obtidas, como a equação da elipse, variações no comprimento de ângulos e linhas, orientação, rotação e magnitude dos eixos principais, e razão de deformação. A aplicação dessas equações depende de dados que podem ser obtidos diretamente no campo, em amostras, em mapas e em perfis geológicos, podendo ser usadas para a previsão do estado finito de deformação a partir de um estado inicial indeformado, ou para o restabelecimento do estado inicial a partir do estado deformado final.

## ABSTRACT

This paper deals with the geometry of strain superposition in two dimensions. Four models of homogeneous deformations are considered: body rotation, simple shear, pure shear and area change.

Each model is properly described by a  $2 \times 2$  matrix, and the sequential superposition of two or more deformations is adequately analyzed by the matrix multiplication. The finite state of strain is described in terms of the total strain, and from that, several mathematical expressions are obtained, e.g., the strain ellipse equation, the change in length of a line, the change in the angle between two lines, the change in area, the ratio of the principal strains and the orientations, rotations and magnitudes of the principals strains axes. The applications of these equations depend on the correct data that can be obtained from geological maps, sections or samples and others informations that can be directly obtained from rock exposures and thin sections. The results may be used to restore deformed sections to an undeformed state.

## INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é a apresentação da teoria da superposição de deformações, do ponto de vista da análise matemática, de maneira simplificada, iniciando-se com modelos básicos, como cisalhamento puro, cisalhamento simples, rotação e mudança de área, e em seguida, tratar da superposição seqüencial desses modelos. A forma mais adequada para o tratamento dessa questão é através do cálculo matricial, envolvendo matrizes quadradas de dois x dois, por se tratar, nesta primeira instância, do estudo da deformação bidimensional, ou plana. Cada modelo de deformação é representado por uma matriz, e no caso de deformações superpostas, deve-se proceder à multiplicação das matrizes dos diferentes modelos ou fases de deformação, obtendo-se uma matriz que representa a deformação finita total sofrida pela rocha. A partir dessa matriz, são obtidos diversos parâmetros úteis nos estudos geológicos, como a equação da elipse de deformação, mudanças no comprimento de linhas, orientação dos eixos principais de deformação, magnitude das deformações principais, a razão de deformação, valores do cisalhamento simples linear ou angular, alongamento ou encurtamento máximos ou então, alongamento ou encurtamento ao longo de uma direção qualquer, etc. Os parâmetros acima, podem ser utilizados para a previsão do estado finito de deformação, a partir de um estado inicial ou, ao contrário, reconstituir o estado inicial a partir do estado finito de deformação, podendo esses cálculos serem aplicados a seções geológicas, mapas, fotografias de afloramentos, etc. Além disso, pode-se fazer estimativas acerca do deslocamento em zonas de cisalhamento dúcteis, do encurtamento ou estiramento crustal em seções geológicas, do ganho ou perda de área em áreas transtrativas e transpressivas, entre outros, levando a um aprofundamento dos conhecimentos geológicos

de uma área.

## TIPOS BÁSICOS DE DESLOCAMENTO

A mudança de posição de um ponto em um corpo é conhecida como deslocamento e qualquer mudança na forma do corpo, em consequência desse deslocamento, é conhecida como deformação. O deslocamento de um ponto em um plano, é definido como o vetor que une o ponto inicial  $(X, Y)$  à sua posição final  $(X_1, Y_1)$ . Neste trabalho, serão abordados quatro tipos básicos de deslocamento de pontos de um corpo deformado (Fig. 1), cujas equações são apresentadas:

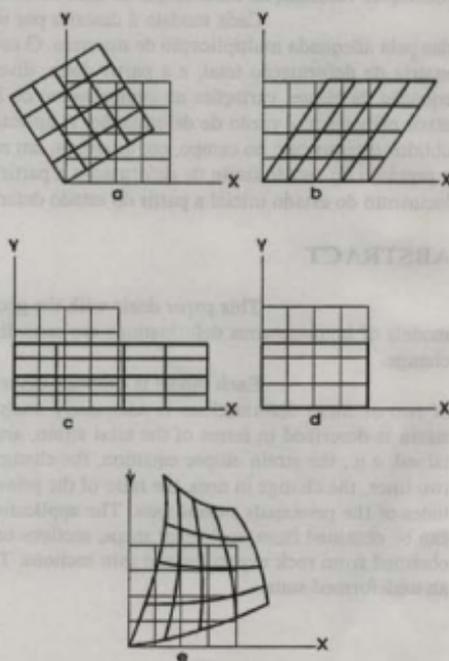


Figura 1 - Cinco diferentes tipos de deformação. a. rotação, b. cisalhamento simples, c. cisalhamento puro, d. mudança de área, e. deformação heterogênea. (Segundo Ramsay & Huber, 1983).

**Rotação**

O efeito nesse modelo é a rotação de um ponto qualquer do corpo, em torno de um ponto origem (0,0), sem deformação interna, através de um ângulo de rotação ( $w$ ) (Fig. 2). Os vetores de deslocamento variam em direção e em comprimento, podendo-se ter uma rotação horária ou anti-horária.

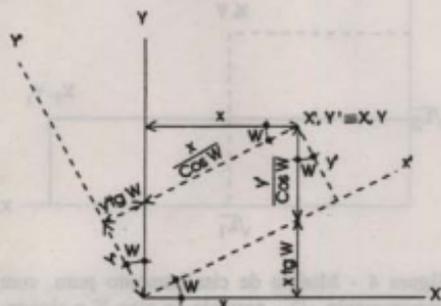


Figura 2 - Mudança de coordenadas de um ponto (X,Y) para as novas coordenadas (X<sub>1</sub>,Y<sub>1</sub>) através de uma rotação ( $w$ ) no sentido horário e em torno da origem (0,0).

$$\begin{aligned} X_1 &= X \cos w + Y \sin w \\ Y_1 &= -X \sin w + Y \cos w \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= X \cos w - Y \sin w \\ Y_1 &= X \sin w + Y \cos w \end{aligned} \quad (2)$$

As equações (1) e (2) correspondem às rotações horária e anti-horária, respectivamente. Em termos matriciais assumem as seguintes formas, respectivamente matrizes rotação horária e anti-horária:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos w & \sin w \\ -\sin w & \cos w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (4)$$

**Cisalhamento simples**

Nesse modelo, os vetores de deslocamento são todos paralelos, porém, de comprimentos diferentes. A deformação é homogênea, e não implica em mudança de área, porém envolve rotação. Se as linhas originalmente paralelas ao eixo Y das coordenadas cartesianas são deslocadas de um ângulo  $\psi$  no sentido horário, as equações de transformação de coordenadas são (ver Fig. 3):

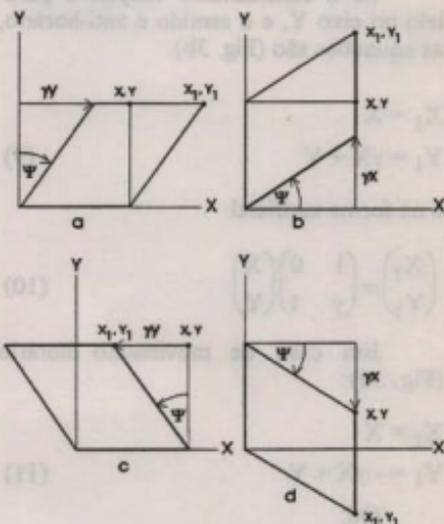


Figura 3 - Modelo de deformação por cisalhamento simples. a,c: movimento paralelo ao eixo X, lateral direito (a) e lateral esquerdo (c). b,d: movimento paralelo ao eixo Y, lateral esquerdo (b) e lateral direito (d).

$$\begin{aligned} X_1 &= X + \gamma Y \\ Y_1 &= Y \end{aligned} \quad (5)$$

Na forma matricial, essas equações podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (6)$$

onde  $\gamma = \text{tg} \psi$

No caso de rotação anti-horária das linhas originalmente paralelas ao eixo Y, as equações são (Fig. 3c):

$$X_1 = X - \gamma Y$$

$$Y_1 = Y \quad (7)$$

ou na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (8)$$

Se o cisalhamento simples é paralelo ao eixo Y, e o sentido é anti-horário, as equações são (Fig. 3b):

$$X_1 = X$$

$$Y_1 = \gamma X + Y \quad (9)$$

e na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (10)$$

Em caso de movimento horário (Fig. 3d):

$$X_1 = X$$

$$Y_1 = -\gamma X + Y \quad (11)$$

Ou:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (12)$$

### Cisalhamento puro

Este mecanismo de deformação leva a um encurtamento homogêneo, paralelo a um dos eixos, por exemplo ao eixo Y, e um alongamento correspondente homogêneo, paralelo ao eixo X das coordenadas, dispostos convenientemente paralelos aos eixos Y e X, respectivamente, da elipse de deformação. A deformação segundo esse modelo, é relativamente simples, mas o vetor de deslocamento é complexo, variando pelo corpo, tanto em orientação, como em comprimento

(Ramsay & Huber, 1983). A deformação é homogênea e irrotacional, com o eixo maior da elipse sendo paralelo ao eixo X das coordenadas cartesianas, e o menor é paralelo a Y. Não há mudança de área na deformação. As equações de transformação das coordenadas são (Fig. 4):

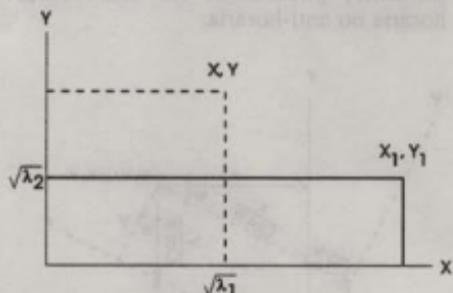


Figura 4 - Modelo de cisalhamento puro, com encurtamento  $\sqrt{\lambda_1}$  paralelo ao eixo Y e alongamento  $\sqrt{\lambda_2}$  paralelo ao eixo X.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (13)$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as extensões quadráticas, que no caso da Figura 4, são paralelas aos eixos X e Y, respectivamente.

Se o eixo maior da elipse for paralelo ao eixo Y, então a matriz será do tipo:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (14)$$

### Mudança de área

Este tipo de deformação implica em uma alteração na área da seção estudada. Envolve processos geológicos tais como dissolução por pressão, no caso de diminuição de área, ou aporte de material, na forma de diques, veios soluções hidrotermais, etc, nos casos de ganho de área. Há diversos trabalhos interessantes sobre o tema, e entre os principais, podem ser

citados os de Ramsay & Wood (1973); Robin (1974); Barr & Coward (1974); Cobbold (1976, 1977); Gray (1977, 1979); Gray & Durney (1979); Schwerdtner (1984).

A mudança de área é dada pela quantidade  $(1+\Delta)$ , sendo que  $(1+\Delta) < 1$  indica uma diminuição de área,  $(1+\Delta) > 1$ , implica em aumento e área, e,  $(1+\Delta) = 1$ , não há mudança de área. As equações que descrevem esse tipo de deformação são:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (15)$$

no caso em que a mudança de área se dá devido à variação ao longo do eixo Y das coordenadas cartesianas (Fig. 5), e,

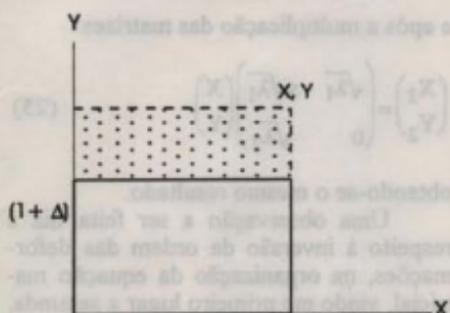


Figura 5 - Mudança de área, com diminuição do comprimento ao longo do eixo Y, sem correspondente alongamento em X. A área achuriada representa a quantidade de área diminuída, onde  $(1+\Delta) < 1$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\Delta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (16)$$

no caso em que a mudança de área se dá devido à variação ao longo do eixo X das coordenadas cartesianas.

### Deformação heterogênea geral

O vetor de deslocamento é complexo e o tratamento matemático é mais complicado que no caso anterior. Nesse tipo de deformação, o quadrado original

não será transformado em um paralelogramo, e cada figura final terá uma forma própria e diferente. As linhas retas e paralelas antes da deformação não permanecerão nem retas e nem paralelas após a deformação. Nessas situações, um bom método de estudo é analisar pequenas porções do corpo que tenham se deformado homogêneaemente (Fig. 1e).

### Outros modelos

Outras situações são possíveis de ocorrerem na natureza, como por exemplo:

a) Compressão ao longo dos eixos X e Y do elipsóide de deformação.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (17)$$

nesse caso  $\sqrt{\lambda_1} < 1$ , corresponde à deformação no eixo X, e  $\lambda_2 < \lambda_1$ , corresponde à deformação no eixo Y do elipsóide de deformação.

b) Dilatação ao longo dos eixos X e Y:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (18)$$

onde  $\lambda_1 > \lambda_2 > 1$

c) Dilatação ao longo do eixo X, sem deformação correspondente em Y:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (19)$$

com  $\lambda_1 > 1$

d) Compressão em Y, sem alongamento em X:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (20)$$

com  $\lambda_2 < 1$ .

## SUPERPOSIÇÃO SEQUENCIAL DE DEFORMAÇÕES EM DUAS DIMENSÕES

Os diferentes mecanismos de deformação podem ser superpostos sequencialmente, e a matriz de deformação final é resultante da multiplicação das matrizes correspondentes. A ordem de superposição é importante, uma vez que a multiplicação de matrizes não é comutativa. A seguir são examinados alguns casos mais prováveis de ocorrerem na natureza, envolvendo cisalhamento simples, cisalhamento puro, rotação e mudança de área.

Diversos autores se ocuparam do tema, e entre os trabalhos mais importantes estão os de Ramberg (1975); Ramsay (1967, 1969, 1974, 1980); Gould (1967); Onasch (1984); Ramsay & Graham (1970); Bell (1978); Ramsay & Huber (1983, 1987); Sanderson (1982); Sanderson & Marchini (1984), entre outros. Um texto interessante sobre esse mesmo tema pode ser encontrado em Ferguson (1988). O exposto a seguir é em grande parte baseado nos autores supra mencionados. Adicionalmente, textos básicos em geologia estrutural poderão ser consultados, como, por exemplo: Ragan (1985); Ramsay & Huber (1983); Price & Cosgrove (1990).

### Cisalhamento simples, seguido de cisalhamento puro

A primeira deformação, a de cisalhamento simples horário, desloca os pontos  $(X, Y)$  para uma nova posição  $(X_1, Y_1)$ , e a segunda deformação, a de cisalhamento puro, desloca por sua vez, os pontos  $(X_1, Y_1)$  para uma nova posição  $(X_2, Y_2)$ , ou seja:

$$\begin{aligned} X_1 &= X + \gamma Y \\ Y_1 &= Y \end{aligned} \quad (21)$$

e

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 \sqrt{\lambda_1} \\ Y_2 &= Y_1 \sqrt{\lambda_2} \end{aligned} \quad (22)$$

Procedendo-se às substituições em  $X_1$  e  $Y_1$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} X_2 &= X \sqrt{\lambda_1} + Y \gamma \sqrt{\lambda_1} \\ Y_2 &= Y \sqrt{\lambda_2} \end{aligned} \quad (23)$$

Em termos matriciais, essa mesma operação pode ser feita da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (24)$$

e após a multiplicação das matrizes:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \gamma \sqrt{\lambda_1} \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (25)$$

obtendo-se o mesmo resultado.

Uma observação a ser feita diz a respeito à inversão da ordem das deformações, na organização da equação matricial, vindo em primeiro lugar a segunda, e em seguida a primeira deformação, no segundo termo da equação.

Se a ordem das deformações for invertida, isto é, cisalhamento puro seguido de cisalhamento simples, então:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (26)$$

Ou seja:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \gamma \sqrt{\lambda_2} \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (27)$$

A Figura 6 mostra diagramaticamente o resultado das duas deformações superpostas acima. Observar a diferença

marcante entre os dois casos analisados.

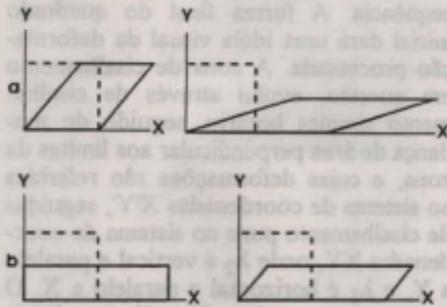


Figura 6 - Cisalhamento simples seguido de cisalhamento puro (a), e, cisalhamento puro seguido de cisalhamento simples (b). As intensidades de deformação são iguais (Segundo Ramsay & Huber, 1983).

**Cisalhamento simples seguido de mudança de área perpendicularmente à zona de cisalhamento**

Este modelo é conhecido entre os geólogos como modelo de transpressão-transtração. Da forma como foi originalmente definido, transpressão representa um modelo de deformação em zonas transcorrentes, por um processo de cisalhamento simples seguido de encurtamento perpendicular ao plano de cisalhamento e de um alongamento na vertical, responsável por exemplo, pela formação de relevo positivo; transtração, ao contrário, envolve um alargamento da zona de cisalhamento e um equivalente encurtamento na vertical, responsável pela formação de bacias sedimentares. Em termos matemáticos, transpressão e transtração podem ser descritos de forma adequada como uma deformação por cisalhamento simples, seguida de cisalhamento puro (ver por exemplo Sanderson & Marchini, 1984). Assim, para transtração:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (28)$$

onde  $\sqrt{\lambda_2} = 1$  e  $\sqrt{\lambda_1} = (1+\Delta)$ , descrevem o valor da mudança de área.

A matriz pode ser reescrita mais adequadamente, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\Delta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (29)$$

e após a multiplicação das matrizes, tem-se:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\Delta) & \gamma(1+\Delta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (30)$$

A Figura 7 mostra um quadrado inicial, deformado por cisalhamento simples horário, e posteriormente, submetido a um alongamento perpendicular à zona de cisalhamento, ou na direção da ordenada Y. A matriz do cisalhamento puro mostra que ao longo da zona de cisalhamento, paralelamente ao eixo X das coordenadas, não há deformação por esse processo (daí o valor 1 para  $\sqrt{\lambda_2}$ ), pois  $\lambda_3$  nesse caso, é vertical, e portanto, perpendicular ao plano horizontal sob análise. Se  $(1+\Delta) > 1$ , então o modelo é o de transtração; se  $(1+\Delta) < 1$ , o modelo é o de transpressão, e se  $(1+\Delta) = 1$ , o modelo é o de cisalhamento simples.

**Cisalhamento simples, seguido de dissolução por pressão**

Nesse caso, a variação em área, perpendicularmente ao plano de cisalhamento, não é compensada por um alongamento ou encurtamento na vertical, como no caso anterior. O modelo pode ser descrito como o de cisalhamento puro, seguido de diminuição de área, perpendicular ao eixo de compressão Z.

Nesse caso, a variação em área, perpendicularmente ao plano de cisalhamento, não é compensada por um alongamento ou encurtamento na vertical, como no caso anterior. O modelo pode ser descrito como o de cisalhamento puro, seguido de diminuição de área, perpendi-

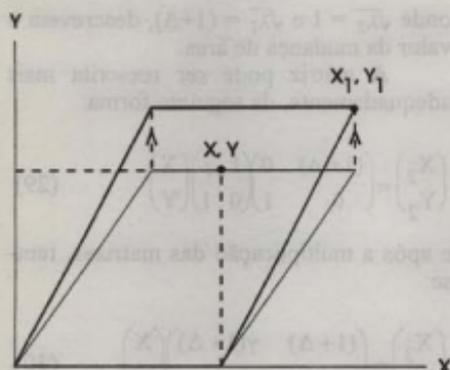


Figura 7 - Cisalhamento simples horário, seguido de aumento de área paralelamente ao eixo Y. Após as deformações, o ponto de coordenadas  $(X, Y)$  desloca-se a uma nova posição, com coordenadas  $(X_1, Y_1)$ .

cular ao eixo de compressão Z.

Dessa forma, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & (1+\Delta)\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \quad (31)$$

onde  $(1+\Delta) < 1$

### Deformação seqüencial envolvendo rotação

Nesta seção são analisados os efeitos da superposição seqüencial de deformações sobre uma zona de cisalhamento inclinada em relação à horizontal. O estado inicial, isto é, pré-deformacional, é representado pelo quadrado tracejado (Fig. 8), no sistema de coordenadas  $X'Y'$ , onde  $X'$  é paralelo aos limites da zona e  $Y'$  é perpendicular. O estado final de cada deformação é representado pelo quadrilátero em linha cheia. Para a análise geométrica da deformação, toma-se um ponto qualquer do corpo como referência, com coordenadas  $(X, Y)$  ou  $(X_0, Y_0)$ , conforme o caso, e a posição final desse mesmo ponto terá como coordenadas

$(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$ , etc, em função do número de deformações superpostas em seqüência. A forma final do quadrado inicial dará uma idéia visual da deformação processada. A zona de cisalhamento em questão, evolui através de cisalhamento simples horário, seguido de mudança de área perpendicular aos limites da zona, e cujas deformações são referidas ao sistema de coordenadas  $X'Y'$ , seguidas de cisalhamento puro no sistema de coordenadas  $XY$ , onde  $\lambda_2$  é vertical e paralelo a  $Y$ , e  $\lambda_1$  é horizontal e paralelo a  $X$ . O ângulo entre os eixos  $X$  e  $X'$  é  $w$  (Vide Fig. 8).

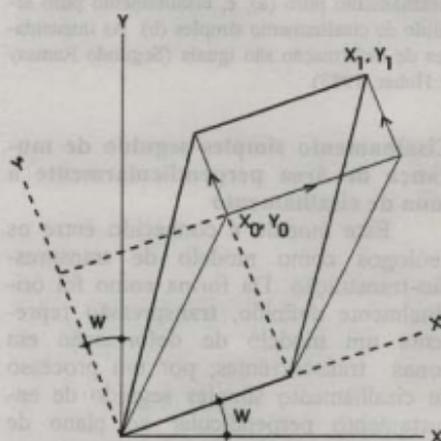


Figura 8 - Cisalhamento simples horário, seguido de aumento de área perpendicular à zona de cisalhamento no sistema de coordenadas  $X'Y'$ . As setas indicam a trajetória do ponto  $(X_0, Y_0)$ .

A deformação no sistema de coordenadas  $X'Y'$  é descrita por:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & (1+\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

que representa o modelo de cisalhamento simples horário, seguido de mudança de área perpendicular à zona de deformação. O eixo das ordenadas  $Y$  é perpendicular, enquanto o eixo das abcissas  $X$  é paralelo aos limites da zona de ci-

salhamento (Fig. 8).

Entretanto, o cisalhamento puro é referido ao sistema de coordenadas X, Y, onde X é horizontal e Y vertical, havendo um ângulo de rotação w entre os sistemas XY e X'Y'. As coordenadas X'Y' deverão ser expressas no mesmo sistema de coordenada XY, através da matriz de rotação anti-horária, ou seja:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos w & -\text{sen} w \\ \text{sen} w & \cos w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_2 \\ Y'_2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

substituindo-se a equação (32) em (33), tem-se:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos w & -\text{sen} w \\ \text{sen} w & \cos w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & (1+\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

A seguir superpõe-se o cisalhamento puro, através do qual, as coordenadas (X<sub>2</sub>, Y<sub>2</sub>) serão deslocadas para uma posição (X<sub>3</sub>, Y<sub>3</sub>).

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} \quad (35)$$

e substituindo-se (34) em (35), obtém-se:

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos w & -\text{sen} w \\ \text{sen} w & \cos w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & (1+\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

E após as multiplicações de matrizes, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Onde:

$$a_{11} = \sqrt{\lambda_1} \cos w$$

$$a_{12} = \sqrt{\lambda_1} (\gamma \cos w - (1+\Delta) \text{sen} w)$$

$$a_{21} = \sqrt{\lambda_2} \text{sen} w$$

$$a_{22} = \sqrt{\lambda_2} (\gamma \text{sen} w + (1+\Delta) \cos w)$$

Esta equação relaciona a posição final de partículas em termos do sistema de coordenadas XY, em função da deformação total e em relação às coordenadas iniciais, no sistema X'Y'. Desejando-se expressar as coordenadas iniciais (X'<sub>0</sub>, Y'<sub>0</sub>) no sistema XY, é necessária a seguinte transformação:

$$\begin{pmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos w & \text{sen} w \\ -\text{sen} w & \cos w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

A equação (38) pode então ser substituída em (37) e após a multiplicação de matrizes, obter-se-á as coordenadas finais (X<sub>3</sub>, Y<sub>3</sub>) em função das coordenadas iniciais (X<sub>0</sub>, Y<sub>0</sub>), referidas ao mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Para a obtenção da forma final de um quadrado inicial de 3x3 cm, basta substituir na equação (37), os valores das correspondentes deformações. Admitindo-se, por exemplo, que λ<sub>1</sub> = 4.54, λ<sub>2</sub> = 0.22, γ = 1, (1+Δ) = 1.5 e w = 20°, substituindo-se esses valores na equação, e efetuando-se os cálculos, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0,91 \\ 0,16 & 0,82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \end{pmatrix}$$

ou então:

$$X_3 = 2 X'_0 + 0,91 Y'_0$$

$$Y_3 = 0,16 X'_0 + 0,82 Y'_0$$

As coordenadas finais de qualquer ponto do corpo deformado, podem ser obtidas pela substituição na equação acima dos correspondentes valores das coordenadas iniciais do quadrado. No presente caso, calcularam-se as coordenadas finais dos vértices do quadrado, em função das coordenadas iniciais, lidas no sistema de coordenadas X'Y' (Fig. 9).

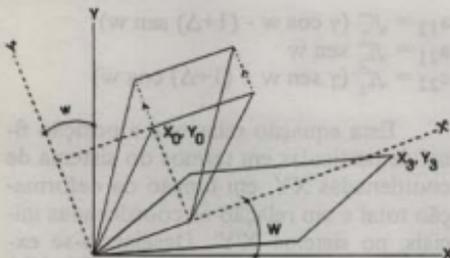


Figura 9 - Forma final do quadrado inicial após a deformação por cisalhamento simples, seguido por aumento de área perpendicularmente à zona de cisalhamento no sistema de coordenadas  $X'Y'$ . Posteriormente o corpo é submetido a um cisalhamento puro no sistema de coordenadas  $XY$ .

## DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS DA DEFORMAÇÃO SUPERPOSTA

### Equação da elipse de deformação

O movimento de todos os pontos de uma superfície pode ser expresso por meio de um conjunto de equações, chamado equações de transformação de coordenadas. Nas primeiras, os dados plotados no membro direito das equações, referem-se às posições originais dos pontos (conhecidas como equações Lagrangianas), enquanto nas segundas, são plotadas as posições finais dos pontos (conhecidas como equações Eulerianas). A forma mais simples das equações de transformações de coordenadas é linear:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \quad (40)$$

onde  $a, b, c, d, A, B, C$  e  $D$  são constantes. A inversão da matriz (39) permite expressar as coordenadas iniciais em função das coordenadas finais. A partir de (39),

tem-se:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

onde  $\Delta$  é o determinante dos coeficientes, e é dado por  $\Delta = ad - bc$ .

Esta equação, por sua vez, permite estabelecer a relação existente entre os coeficientes das matrizes (39) e (40):

$$A = d/\Delta; B = -b/\Delta; C = -c/\Delta; D = a/\Delta$$

A matriz (39) é denominada de matriz da deformação, enquanto a (40) é denominada de matriz recíproca da deformação, (Ramsay & Huber, 1983, apêndice B) sendo que esta deve ser aplicada a um material deformado se pretende remover a deformação.

A transformação de um círculo inicial, em uma elipse, fornece importantes detalhes do processo de deformação, melhor que qualquer outra figura geométrica. O procedimento geral para a determinação da elipse resultante de deformações superpostas sequencialmente é, em primeiro lugar, determinar as equações para a deformação finita, como por exemplo, uma das equações básicas (28), (31) ou (34). A equação representada genericamente pela matriz (41) para  $X_0$  e  $Y_0$ , é inserida na equação do círculo inicial, e o resultado final será a equação da elipse de deformação.

O círculo inicial, de raio unitário, e centrado na origem das coordenadas, pode ser descrito por  $X_0^2 + Y_0^2 = 1$ , e nesta equação deverão ser inseridos os valores de  $X_0$  e  $Y_0$ , determinados em função de  $X_1$  e  $Y_1$  (posições finais dos pontos), para a determinação da elipse correspondente da deformação. A partir de (41), tem-se:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dX_1 - bY_1 / (ad - bc) \\ aY_1 - cX_1 / (ad - bc) \end{pmatrix}$$

donde:

$$X_0=(dX_1-bX_1)/\Delta \text{ e } Y_0=(aY_1-cX_1)/\Delta$$

Colocando-se esses valores na equação do círculo inicial:

$$\left(\frac{(dX_1-bY_1)}{(ad-bc)}\right)^2 + \left(\frac{(aY_1-cX_1)}{(ad-bc)}\right)^2 = 1$$

e após desenvolvimento:

$$X_1^2 \frac{(d^2+c^2)}{(ad-bc)^2} - 2X_1Y_1 \frac{(bd+ac)}{(ad-bc)^2} + Y_1^2 \frac{(a^2+b^2)}{(ad-bc)^2} = 1 \quad (42)$$

Esta é a equação da elipse de deformação, com o centro na origem e eixos geralmente inclinados em relação às coordenadas cartesianas X e Y.

**Mudança no comprimento de linhas**

A Figura 10 mostra uma linha antes da deformação unindo os pontos (0,0) e (X<sub>0</sub>,Y<sub>0</sub>), de comprimento unitário, e fazendo um ângulo α com o eixo dos X. Após a deformação, o ponto (X<sub>0</sub>,Y<sub>0</sub>)

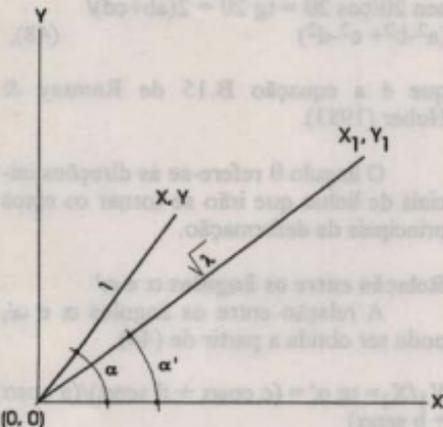


Figura 10 - Mudança do comprimento de uma linha unitária e disposta a um ângulo α com o eixo dos X, como resultado de uma deformação homogênea. (Baseada em Ramsay & Huber, 1983).

muda para uma nova posição (X<sub>1</sub>,Y<sub>1</sub>), e o ângulo α, muda para α'. O comprimento final dessa linha é agora (1+e) ou (λ)<sup>1/2</sup> unidades. Logo:

$$\begin{aligned} X_0 &= \cos \alpha \\ Y_0 &= \sin \alpha \end{aligned} \quad (43)$$

Substituindo esses valores na equação (39) e desenvolvendo-a:

$$\begin{aligned} X_1 &= a \cos \alpha + b \sin \alpha \\ Y_1 &= c \cos \alpha + d \sin \alpha \end{aligned} \quad (44)$$

A partir do Teorema de Pitágoras, pode-se fazer:

$$(1+e)^2 = X_1^2 + Y_1^2$$

e após as substituições de (44):

$$(1+e)^2 = (a \cos \alpha + b \sin \alpha)^2 + (c \cos \alpha + d \sin \alpha)^2$$

expandindo a equação, convertendo o ângulo α para 2α, e lembrando que:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= (1 + \cos 2\alpha) / 2 ; \\ \sin^2 \alpha &= (1 - \cos 2\alpha) / 2 , \text{ e} \\ \sin \alpha \cos \alpha &= \sin 2\alpha / 2 \end{aligned}$$

e após as substituições, obtém-se a eq. B.11 de Ramsay & Huber (1983), ou seja:

$$\lambda = \frac{(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) \cos 2\alpha + (ab + cd) \sin 2\alpha + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) / 2}{2} \quad (45)$$

onde a extensão quadrática λ = (1+e)<sup>2</sup>.

A deformação longitudinal, ao longo de qualquer linha disposta a um ângulo α' com o eixo dos X, medido no estado deformado, que de um modo geral é mais conveniente, pode também ser determinada. A partir da Figura 10 acima, pode-se fazer:

$$X_1 = \sqrt{\lambda} \cos \alpha'$$

$$Y_1 = \sqrt{\lambda} \sin \alpha'$$

Substituindo-se essas igualdades na equação (41), e após a multiplicação das matrizes, obtém-se:

$$X_0 = (d\sqrt{\lambda} \cos \alpha' / \Delta) - (b\sqrt{\lambda} \sin \alpha' / \Delta)$$

$$Y_0 = (a\sqrt{\lambda} \sin \alpha' / \Delta) - (c\sqrt{\lambda} \cos \alpha' / \Delta)$$

e fazendo-se  $X_0^2 + Y_0^2 = 1$ , desenvolvendo-se os termos, e substituindo-se por ângulos duplos, obtém-se a expressão para a extensão quadrática recíproca  $\lambda'$ . Lembrando antes que  $\lambda' = 1/\lambda$ , tem-se:

$$\lambda' = 1 / ((ad-bc)^2 - ((a^2+c^2-a^2-b^2)/2) \cos 2\alpha' - (ac+bd) \sin 2\alpha' + (a^2+b^2+c^2+d^2)/2) \quad (46)$$

que corresponde exatamente à equação B.12 de Ramsay & Huber (1983).

A equação (46) expressa o valor da extensão quadrática recíproca ( $\lambda'$ ) para qualquer linha após a deformação, conhecendo-se o valor do ângulo ( $\alpha'$ ) e o valor das deformações superpostas.

### Orientação dos eixos principais da elipse de deformação

As orientações dos eixos principais de deformação ( $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ) podem ser determinadas achando-se os valores máximos e mínimos da equação (46). Para tanto é necessário diferenciar essa equação com respeito a  $\alpha'$ , e igualar o resultado a zero, que é o procedimento matemático normal para a determinação de valores máximo e mínimo de uma função. Os comprimentos máximo e mínimo de linhas dentro de uma elipse coincidem com os eixos X e Y da mesma. Por definição, o ângulo entre o eixo maior da elipse e o eixo das abscissas é  $\theta$  no estado indeformado, e  $\theta'$  no estado deformado. Assim, é necessário substituir o ângulo  $\alpha$  por  $\theta$  e  $\alpha'$  por  $\theta'$ . Dessa forma, tem-se:

$$d\lambda'/d\alpha' = 0 = 1 / ((ad-bc)^2 - ((a^2+b^2-c^2-d^2) \sin 2\theta' - 2(ac-bd) \cos 2\theta'))$$

a qual fornece:

$$\sin 2\theta' / \cos 2\theta' = \operatorname{tg} 2\theta' = 2(ac+bd) / (a^2+b^2-c^2-d^2) \quad (47)$$

que corresponde à eq. B.14 de Ramsay & Huber (1983).

O ângulo  $\theta'$  refere-se à orientação dos eixos principais de deformação, que por sua vez representam os valores máximos e mínimos de uma elipse de deformação.

Aplicando-se o mesmo procedimento acima, para a equação (45), pode-se obter a orientação das linhas que irão se tornar os eixos principais de deformação, ou seja:

$$d\lambda/d\alpha = 0 = -(a^2-b^2+c^2-d^2) \sin 2\theta + 2(ab+cd) \cos 2\theta$$

e finalmente:

$$\sin 2\theta / \cos 2\theta = \operatorname{tg} 2\theta = 2(ab+cd) / (a^2-b^2+c^2-d^2) \quad (48)$$

que é a equação B.15 de Ramsay & Huber (1983).

O ângulo  $\theta$  refere-se às direções iniciais de linhas que irão se tornar os eixos principais de deformação.

### Relação entre os ângulos $\alpha$ e $\alpha'$

A relação entre os ângulos  $\alpha$  e  $\alpha'$ , pode ser obtida a partir de (44).

$$Y_1/X_1 = \operatorname{tg} \alpha' = (c \cos \alpha + d \sin \alpha) / (a \cos \alpha + b \sin \alpha)$$

Dividindo ambos os termos da direita por  $\cos \alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha' = (c+d \operatorname{tg} \alpha) / (a+b \operatorname{tg} \alpha) \quad (49)$$

Pode-se ainda fazer, a partir dessa mesma equação:

$$\operatorname{tg} \alpha = (c - a \operatorname{tg} \alpha') / (b \operatorname{tg} \alpha' - d) \quad (50)$$

As equações (49) e (50) correspondem às equações B.13a e B.13b de Ramsay & Huber (1983).

### Magnitude dos eixos principais de deformação

Os valores das magnitudes dos eixos principais de deformação  $\sqrt{\lambda_1}$  e  $\sqrt{\lambda_2}$ , podem ser obtidos pela substituição das condições da equação (48), para a direção dos eixos principais de deformação, na equação para o valor da extensão quadrática (45). O resultado é então a equação das extensões principais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

Usando-se das identidades trigonométricas:  $\sec^2 2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2 2\theta$ , e  $\sec 2\theta = 1/\cos 2\theta$ , obtém-se a partir das mesmas:

$$\cos 2\theta = 1/(1 + \operatorname{tg}^2 2\theta)^{1/2}$$

e substituindo-se agora, nesta equação, o valor da  $\operatorname{tg} 2\theta$  (equação 48), tem-se:

$$\cos 2\theta = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) / ((a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 + 4(ab + cd)^2)^{1/2} \quad (51)$$

Usando-se as identidades trigonométricas:  $\operatorname{cosec}^2 2\theta = 1 + \cotg^2 2\theta$ , e,  $\operatorname{cosec} 2\theta = 1/\operatorname{sen} 2\theta$ , tem-se a partir das mesmas:

$$\operatorname{sen} 2\theta = \operatorname{tg} 2\theta / (1 + \operatorname{tg}^2 2\theta)^{1/2}$$

e após a substituição do valor da  $\operatorname{tg} 2\theta$  (equação 48):

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2(ab + cd) / ((a^2 - b^2 + c^2 + d^2)^2 + 4(ab + cd)^2)^{1/2} \quad (52)$$

Substituindo-se as equações (50) e (51) na equação (45), e lembrando que, nesse casos o ângulo  $\alpha$  deve ser substituído pelo ângulo  $\theta$  e, após as simplificações, obtém-se:

$$\lambda_1 \text{ ou } \lambda_2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \pm ((a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 4(ad - bc)^2)^{1/2} / 2 \quad (53)$$

ou ainda:

$$\lambda_1 \text{ ou } \lambda_2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) / 2 \pm ((a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 4(ab + cd)^2)^{1/2} / 2 \quad (54)$$

que corresponde à equação B.19 de Ramsay & Huber (1983).

### Razão de deformação

A razão de deformação R é uma medida importante na análise da deformação de uma área, pois pode ser obtida diretamente em lâminas delgadas, por exemplo, através de métodos como os de Fry, Centro a Centro, entre outros. O valor de R pode ser calculado a partir das equações (53) e (54) acima, ou seja:

$$R = (\lambda_1 / \lambda_2)^{1/2}$$

$$R = ((a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ((a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 4(ad - bc)^2)^{1/2}) / ((a^2 + b^2 + c^2 + d^2) / 2 \pm ((a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 4(ab + cd)^2)^{1/2}))^{1/2} \quad (55)$$

que corresponde a Eq. B.20 de Ramsay & Huber (1983).

### Rotação dos eixos de deformação

A rotação w dos eixos de deformação é definida por  $w = \theta' - \theta$ . Fazendo-se

$\operatorname{tg} 2w = \operatorname{tg} (2\theta' - 2\theta)$ , e lembrando que:

$\operatorname{tg}(2\theta' - 2\theta) = (\operatorname{tg} 2\theta' - \operatorname{tg} 2\theta) / (1 + \operatorname{tg} 2\theta' \operatorname{tg} 2\theta)$ , (fórmula de subtração), e substituindo o valor da  $\operatorname{tg} 2\theta'$  (fornecido pela equação 47) e da  $\operatorname{tg} 2\theta$  (da equação 48), e usando-se a identidade:

$\operatorname{tg} 2w = 2 \operatorname{tg} w / (1 - \operatorname{tg}^2 w)$ , obtém-se:

$$\operatorname{tg} 2w = (c - b) / (a + d) \quad (56)$$

A Figura 11 mostra a elipse resultante da deformação de um círculo de raio

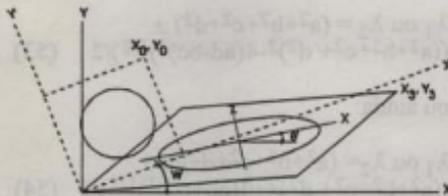


Figura 11 - Posições dos eixos maior e menor da elipse após as deformações superpostas representadas na Figura 9, e forma final da elipse de deformação, derivada do círculo inicial de 1 cm de raio.

unitário, por cisalhamento simples horário, seguido de aumento de área, e finalmente de cisalhamento puro. As orientações dos eixos da elipse foram determinados pela equação (47) e as magnitudes, pela equação (53). Dessa forma,  $\theta' = 13^\circ 36'$ ;  $\sqrt{\lambda_1} = 2.26$ , e  $\sqrt{\lambda_2} = 0.67$ .

As equações (53) e (54) podem ser encontradas em Ramsay & Huber (1983), e a dedução apresentada, segue aquela feita por esses autores. Entretanto, obtém-se uma expressão mais simples para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , através do emprego de autovalores e autovetores. Assim, partindo-se da matriz de coeficientes em (39), pode-se fazer:

$$\begin{pmatrix} a - \alpha & b \\ c & d - \alpha \end{pmatrix} = 0$$

onde  $\alpha$  representa os autovalores da matriz. Calculando-se o determinante e igualando-o a zero, tem-se:

$$(a - \alpha)(d - \alpha) - bc = 0$$

e, após a multiplicação, obtém-se a equação do segundo grau:

$$\alpha^2 - (a + d)\alpha + ad - bc = 0, \text{ cujas raízes são:}$$

$$\alpha_i \text{ (ou } \alpha_{ii}) = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

sendo  $\alpha_i$  e  $\alpha_{ii}$  os dois autovalores da ma-

triz acima. A soma dos autovalores é igual à soma dos elementos da diagonal principal da matriz, o que permite um rápido controle dos cálculos feitos.

Os autovalores definem os comprimentos dos eixos maior e menor da elipse e, assim,  $\alpha_i$  corresponde a  $\sqrt{\lambda_1}$  e  $\alpha_{ii}$  a  $\sqrt{\lambda_2}$ . Para cada autovalor existem dois autovetores, que definem as posições dos eixos da elipse, através de coordenadas. A equação anterior pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} a - \alpha_i & b \\ c & d - \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, após a multiplicação das matrizes:

$$(a - \alpha_i)X_1 + bY_1 = 0$$

$$cX_1 + (d - \alpha_i)Y_1 = 0$$

as quais fornecem os valores de  $X_1$  e de  $Y_1$ , que são os autovetores da matriz acima, associados ao autovalor  $\alpha_i$ . Da mesma forma, fazendo-se:

$$\begin{pmatrix} a - \alpha_{ii} & b \\ c & d - \alpha_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtém-se os autovetores  $X_2$  e  $Y_2$ , associados ao autovalor  $\alpha_{ii}$ . Os autovalores e respectivos autovetores, podem a seguir, ser plotados em relação a um par de coordenadas XY, obtendo-se a elipse de deformação e as orientações dos eixos da mesma. Por exemplo, suponha-se que a matriz (39) tenha fornecido os seguintes valores, após um determinado processo deformativo:  $a = 2$ ;  $b = 1$ ;  $c = 1$ ;  $d = 2$ . Procedendo-se aos cálculos, obtém-se os autovalores:  $\alpha_i = 3$  e  $\alpha_{ii} = 1$ , e, cujos respectivos autovetores são:  $X_1 = 1$ ,  $Y_1 = 1$ , e  $X_2 = 1$ ,  $Y_2 = -1$

Colocando-se os dados acima obtidos em um sistema de coordenadas XY, obtém-se a elipse da figura abaixo (Fig. 12).

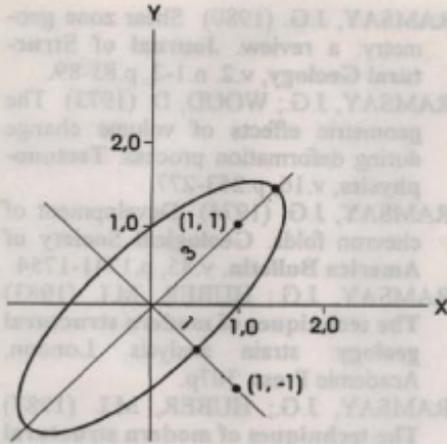


Figura 12 - Elipse de deformação determinada através de autovalores e autovetores.

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em termos práticos, para se proceder à análise da deformação de uma determinada área, basta saber o número, a seqüência e os respectivos modelos das deformações que foram superpostos (cisalhamento puro, cisalhamento simples, mudança de área, rotação, etc). Cada modelo é representado por uma matriz, e o resultado final da superposição de deformações é obtido pela multiplicação das matrizes, na seqüência inversa do ocorrido, chegando-se a uma matriz final do tipo:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

onde  $X_1$  e  $Y_1$  representam as coordenadas finais de pontos do corpo deformado, enquanto  $X_0$  e  $Y_0$  as coordenadas iniciais do mesmo ponto, porém no estado indeformado. Os valores a, b, c, d dependem das deformações superpostas, e uma vez determinados, são a seguir substituídos nas equações (39) a (56), obtendo-se os diferentes parâmetros da deformação, parâmetros esses, possíveis de serem obti-

dos diretamente no campo ou em lâminas delgadas. A combinação de diferentes equações fornece resultados interessantes ao conhecimento geológico de áreas polideformadas.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARR, M.; COWARD, M.P. (1974) A method for the measurement of volume change. *Geological Magazine*, v.111, n.1-4, p.293-296.
- BELL, T.H. (1978) Progressive deformation and reorientation of fold axes in a ductile mylonite zone: the Woodroffe Thrust. *Tectonophysics*, v.44, n.1-4, p.285-320.
- COBBOLD, P.R. (1976) Description and origin of banded deformation structures II. Rheology and the growth of banded perturbations. *Canadian Journal of Earth Sciences*, v.14, n.11, p.2510-2523.
- COBBOLD, P.R. (1977) Description and origin of banded deformation structures. I. Regional strain, local perturbations, and deformation bands. *Canadian Journal of Earth Sciences*, v.14, p.1721-1731.
- FERGUSON, J. (1988) *Mathematics in geology*. London, Allen Unwin, 299p.
- GOULD, P.R. (1967) On the geographic interpretation of eigenvalues: an initial exploration. *Transactions of the Institute of British Geographers*, v.42, p.53-86.
- GRAY, D.R. (1977) Some parameters which affect the morphology of crenulation cleavages. *Journal of Geology*, v.85, p.763-780.
- GRAY, D.R. (1979) Microstructure of crenulation cleavages: an indicator of cleavage origin. *American Journal Science*, v.279, n.2, p.97-128.
- GRAY, D.R.; DURNEY, D.W. (1979) Investigations on the mechanical significance of crenulation cleavage. *Tectonophysics*, v.58, n.1-2, p.35-79.
- ONASCH, C.M. (1984) Application of

- the Rf/O technique to elliptical markers deformed by pressure-solution. **Tectonophysics**, v.110, n.1-2, p.157-165.
- PRICE, N.J.; COSGROVE, J.W. (1990) **Analysis of Geological Structures**. New York, Cambridge University Press. 502p.
- RAGAN, D.M. (1980) **Geologia estrutural: introducion a las tecnicas geometricas**. Barcelona, Ediciones Omega. 207p.
- RAGAN, D.M. (1985) **Structural geology: an introduction to geometrical techniques**. 3. ed. New York, John Wiley & Sons. 393p.
- RAMBERG, H. (1975) Superposition of homogeneous strain and progressive deformation in rocks. **Bulletin Geological Institutions of the University of Uppsala**, v.6, p.35-67.
- RAMSAY, J.G. (1967) **Folding and fracturing of rocks**. New York, MacGraw-Hill. 568p.
- RAMSAY, J.G. (1969) The measurement of strain and displacement in orogenic belts. In "Time and Place in Orogeny". **Geological Society of London, Special Publication**, v.3, p.43-49.
- RAMSAY, J.G.; GRAHAM, R.H. (1970) Strain variations in shear belts. **Canadian Journal of Earth Sciences**, v.7, p.786-813.
- RAMSAY, J.G. (1980) Shear zone geometry: a review. **Journal of Structural Geology**, v.2, n.1-2, p.83-89.
- RAMSAY, J.G.; WOOD, D. (1973) The geometric effects of volume change during deformation process. **Tectonophysics**, v.16, p.263-277.
- RAMSAY, J.G. (1974) Development of chevron folds. **Geological Society of America Bulletin**, v.85, p.1741-1754.
- RAMSAY, J.G.; HUBER, M.I. (1983) **The techniques of modern structural geology: strain analysis**. London, Academic Press. 307p.
- RAMSAY, J.G.; HUBER, M.I. (1987) **The techniques of modern structural geology: folds and fractures**. London, Academic Press. p.308-700.
- ROBIN, P.Y.E. (1979) Theory of metamorphic segregation and related process. **Geochimica et Cosmochimica Acta**, v.43, p.1587-1600.
- SANDERSON, D.J. (1982) - Models of strain variations in nappes and thrust sheets: a review. **Tectonophysics**, v.88, p.201-233.
- SANDERSON, D.J.; MARCHINI, W.R. D. (1984) Transpression. **Journal of Structural Geology**, v.6, p.449-458.
- SCHWERDTNER, W.M. (1981) Calculation of volume change in ductile band structures. **Journal of Structural Geology**, v.4, n.1, p.57-62.

A.P.Fiori - Departamento de Geologia/UFPR, Caixa Postal 19.011, CEP 81531-970, Curitiba, PR, Brasil.

Recebido 16/03/94

Aprovado 16/05/94