Khronos

Foi feito o depósito legal.
Impresso no Brasil / *Printed in Brazil*
Julho 2016

Khronos

Revista de História da Ciência

Número 3· 2016

KHRONOS

Número 3· 2016

Serviço de Biblioteca e Documentação da FFLCH/USP

Khronos: revista de História da Ciência/ publicação do Centro Interunidade de História da Ciência da Universidade de São Paulo. – V. 1, N. 2, jul./dez. (2016)- . – São Paulo: Humanitas, 2016-.

Periodicidade: Semestral

ISSN: **2447-2158**

1. História da Ciência. 2. Tecnologia – História. 3. Metodologia científica – História. 4. Epistemologia – História. I. Centro Interunidade de História da Ciência da Universidade de São Paulo. II. Subtitulo.

Sumário

TERCEIRA ESCOLA DE HISTORIA CONCEITUAL DA MATEMATICA

São Paulo, Ubatuba, 09 a 14 de abril de 2012

A « Terceira Escola de História conceitual da Matemática », foi realizada no estado de São Paulo, Brasil, de 09 a 13 de abril de 2012, patrocinada pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, O Centro Interunidade de História da Ciência, da mesma universidade e o Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS, França).

APRESENTAÇÃO

A série de Escolas de História Conceitual da Matemática iniciou-se em 2008, quando da realização da primeira Escola, na Universidade de Brasília. A segunda foi organizada pela Facultad de Matemática, Astronomía y Física de La Universidad nacional de Córdoba, Argentina, de 23 a 27 de novembro de 2010. Durante essa segunda escola foi decidido que a terceira deveria ser realizada no Brasil e foi indicado seu coordenador.

OBJETIVOS

As Escolas nasceram do anseio de pesquisadores franceses que visitavam nosso pais de estabelecer uma colaboração efetiva entre grupos de pesquisa de ambos os países. Posteriormente, com a realização de Escola na Argentina, esta mete se ampliou para incluir pesquisadores de outros países latino-americanos (nessa segunda escola estavam presentes também profissionais de Argentina e Uruguai, alem de brasileiros e franceses). Em função dessas idéias e experiências, foram estabelecidos os seguintes objetivos para a terceira Escola:

- Promover a comunicação e o debate sobre estudos, projetos e experiências de profissionais e estudantes interessados na História da Matemática e da Ciência em geral e nas relações entre Matemática, História, Epistemologia e Educação Matemática.
- Difundir a História da Matemática e de seus conceitos entre professores universitários e alunos de graduação e pós-graduação.

Comitê Acadêmico

Carlos Henrique Barbosa Gonçalves - Universidade de São Paulo (Brasil)
Cláudio Possani – Universidade de São Paulo (Brasil)
Dominique Flament – CNRS (França)
Francisco César Polcino Milies - Universidade de São Paulo (Brasil)
Olival Freire Jr – Universidade Federal da Bahia (Brasil)
Nicolas Andruskiewitsch – Universidad Nacional de Córdoba (Argentina)
Plínio Zornoff Taboas – Universidade Federal do ABC (Brasil)
A coordenação científica do evento foi a cargo dos professores Carlos Henrique Barbosa Gonçalves e Francisco César Polcino Milies e coordenação geral a cargo deste último.

Comissão organizadora (local)

Carlos Henrique Barbosa Gonçalves – USP
Cláudio Possani – USP
Francisco César Polcino Milies - USP (Coordenador)
Plínio Taboas – Univ. Federal do ABC

Conferencistas

Oscar João Abdounur (Brasil, USP)
Mohamad Al-Houjairi (Liban, Tripoli, Faculté de Génie, Université Libanaise)
Fréderic Brechenmacher (France, Université d’Artois)
Olivier Bruneau (France, AHP, Université de Lorraine)

Caroline Ehrhardt (France)
Dominique Flament (France, Nancy, AHP, CNRS)
Olival Freire Jr (Brasil, UFBA)
Carlos H. B. Çonçalves (Brasil, USP)
Gérard Grimberg (Brasil, UFRJ)
Caroline Jullien (France, AHP, Université de Lorraine)
Gildo Magalhães dos Santos (Brasil, USP)
Rogério Monteiro De Siqueira (Brasil, USP)
Philippe Nabonnand (France, Nancy, AHP, Université de Lorraine)
Francisco César Polcino Milies (Brasil, USP)
Cláudio Possani (Brasil, USP)
Tatiana Roque (Brasil, UFRJ)
Jean-Jacques Szczeciniarz (France, Université Paris 7)
Scott Walter (France, AHP, Université de Lorraine)

Agradecimentos

Agradecemos aqueles que dão palestras, que apresentaram as contribuições para este volume, os árbitros anônimos e as instituições que apoiaram financeiramente o evento: O Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), O Centro Interunidade de História da Ciência (IHC-USP), da mesma universidade e o Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS, França).

Gostaríamos especialmente de agradecer à Catherine Flament (CNRS) a quem devemos a plena e completa realização desta publicação.

SUR LE THEOREME DE MENELAÜS ET SES APPLICATIONS DANS *LES SPHERIQUES* DE *L'ISTIKMAL* D'IBN HUD DE SARAGOSSE

À la mémoire d'Hélène BELLOSTA

Mohamad AL HOUJAIRI
Université Libanaise, CNRS-Liban (Équipe ERTSA) et
Société Libanaise d'Histoire des Sciences

RÉSUMÉ — Cet article porte notamment sur le fameux théorème de Ménélaüs et ses applications dans les *Sphériques* de l'*Istikmāl* du mathématicien saragocien, Ibn Hūd (XI[e] s.). L'étude est basée essentiellement sur les données du manuscrit « Copenhague Or. 82 » et elle comportera trois parties principales : 1) une traduction française des textes manuscrits étudiés ; 2) un commentaire mathématique et historique de leur contenu ; 3) une identification des sources d'Ibn Hūd dans le traitement de ce théorème et ses applications. Le lecteur y trouvera aussi établis et traduits quelques textes (Ibn 'Irāq) qui portent sur le même thème.

ABSTRACT — (On the Menelaus's theorem and its applications in the *Spherics* of al-*Istikmāl* of Ibn Hūd from Zaragoza). This paper focuses particularly on the famous theorem of Menelaus and its applications in the *Spherics* of al-*Istikmāl* of mathematician from Zaragoza, Ibn Hūd (11[th] century). The study is essentially based on the data of « Copenhagen manuscript Or 82 » and consists of three main parts: 1) A French translation of the manuscript studied texts; 2) A mathematical and historical comment of their content, 3) An identification of sources of Ibn Hūd in the treatment of this theorem and its applications. The reader will also find some established and translated texts (Ibn 'Irāq) that carry the same theme.

Introduction

1. Vers l'élaboration d'un dossier sur les *sphériques gréco-arabes*

L'élaboration d'un dossier « satisfaisant » sur le développement des *sphériques gréco-arabes* est évidemment une tâche séduisante pour les chercheurs. Pourtant il semble que sa réalisation actuelle soit loin d'être facile. Parmi les difficultés et les facteurs qui entravent une telle réalisation, nous invoquons les suivants : 1) l'obstacle imposé par l'ignorance de la langue : la plupart des chercheurs ignorent l'arabe alors que la plupart des traités sphériques grecs nous sont parvenus grâce aux manuscrits écrits notamment en arabe (traductions et commentaires) ; 2) l'absence d'une collaboration efficace entre les chercheurs ; 3) la dispersion des données manuscrites ; 4) la rareté des données éditées sur l'histoire des sphériques : les travaux scientifiques publiés par les historiens sur les *sphériques gréco-arabes* sont très rares par comparaison avec ceux qui concernent les autres domaines de l'histoire des mathématiques arabes ; 5) dans la plupart des cas, les travaux menés en histoire des sphériques gréco-arabes sont d'aspect sélectif et individuel.

R. Rashed et moi-même avons déjà publié en commun un article portant sur les *Sphériques* de l'*Istikmāl* d'Ibn Hūd [Rashed et Al-Houjairi 2010]. Le présent article n'est qu'une continuation de ce dernier et tous deux visent à présenter aux historiens des mathématiques, un dossier sur les sphériques à l'époque d'Ibn Hūd. Toutefois, dès le début, l'objectivité nous impose de reconnaître que les résultats attendus ne peuvent pas être qualifiés de « strictement achevants » et couvrir intégralement le contenu exact des sphériques à l'époque du mathématicien saragocien. Le problème auquel nous sommes ici confrontés réside dans le fait que tout « achèvement » probable d'un dossier historique concernant un ouvrage séparé, traitant une certaine discipline mathématique, doit dépendre inévitablement de l'élaboration d'un dossier homologue portant sur le développement antérieur de la même discipline. Pour ce qui est du cas des *Sphériques* de l'*Istikmāl* – choisies comme sujet d'étude –, parmi les nombreuses questions qui se posent, nous trouvons, par exemple, les suivantes : sans passer par les contributions de Théodose (107-43 avant J.-C.), Ménélaüs (actif à la fin du premier siècle après J.-C.), Ibn Qurra (mort en 901), Ibn ʻIrāq (mort en 1036) et beaucoup d'autres, comment peut-on extraire les innovations, identifier les lacunes éventuelles et localiser le développement conceptuel dans cette œuvre ? L'étude du texte sphérique de l'*Istikmāl* nous conduit nécessairement à l'étude des textes antérieurs. C'était le cas de notre premier article portant sur le commentaire et la généralisation, par Ibn Hūd, de la proposition III. 11 des *Sphériques* théodosiennes. L'investigation et l'analyse nous ont conduits, en particulier, aux quatre dernières propositions des *Sphériques* de Ménélaüs, outre la découverte d'une grande variété de résultats géométriques intermédiaires, attribués aux mathématiciens, comme Archimède (mort en 212 av. J.-C), Ibn Qurra, Ibn ʻIrāq et autres. Mais ces quatre propositions de Ménélaüs, ainsi que les autres résultats mentionnés, représentent eux-mêmes, chacun, des sujets d'étude importants et relativement indépendants. Le chercheur en histoire des *sphériques gréco-arabes* est appelé alors, à bien apprendre à manipuler un réseau compliqué d'échanges de savoirs. L'étude effective d'un tel réseau par l'historien nécessitera sûrement : 1) une bonne organisation des étapes de recherche ; 2) une adoption d'une voie d'investigation claire et relativement optimale.

Actuellement, il nous semble que la meilleure voie susceptible de conduire à l'élaboration d'un dossier relativement complet sur les sphériques à l'époque d'Ibn Hūd, réside dans le traitement systématique du contenu des *Sphériques* de l'*Istikmāl* : définition par définition et proposition par proposition, par la méthode empirique d'analyse et de comparaison avec tous les textes manuscrits similaires disponibles. Il est évident que cette méthode est primitive. Mais, elle est aussi certainement univoque et fiable. En adoptant cette méthode dans le cas des *Sphériques* de l'*Istikmāl,* ces derniers peuvent servir d'origine de repérage d'un traitement de l'histoire globale des sphériques dans la *Tradition Arabe*, mais sans privilèges spéciaux. Au cours d'une telle étude basée sur « la comparaison des textes », les étapes essentielles d'action sont les suivantes : 1) l'identification des changements conceptuels dans les textes ; 2) l'investigation des sources et des savoirs transférés ; 3) l'extraction des développements propres à l'auteur (innovations propres). De telle manière que l'investigation des sources et la séparation stricte entre les deux genres de savoirs s'appliquent à tout « *objet sphérique* » (concept, définition, proposition, démonstration…) découvert grâce à « *l'analyse comparative* », soit dans les *Sphériques* de l'*Istikmāl*, soit dans les autres documents de comparaison adoptés.

Notre précédent article a été consacré à une proposition d'Ibn Hūd, qui intègre les trois dernières propositions III. 23-25 des *Sphériques* de Ménélaüs (voir [Ibn ʻIrāq 1998, p. 101-103, 105-106 (du texte arabe)] et [Ibn ʻIrāq, MSb, folios : 52^{v}-53^{r}, 55^{r}-55^{v}]) et qui introduit une nouvelle démonstration « *intrinsèque* » (*purement sphérique*) de la généralisation faite par Ibn ʻIrāq (voir [Ibn ʻIrāq 1998, p. 104] et [Ibn ʻIrāq, MSb, folios : 54^{r}-54^{v}]) de proposition III. 11 des *Sphériques* de Théodose [Théodose 1959, p. 111-112]. Il faut souligner que la proposition III. 11, sa généralisation par Ibn ʻIrāq, ainsi que les propositions III. 22-25 de Ménélaüs, traitent des configurations remarquables sur l'étendue sphérique (en particulier, il semble qu'elles expriment des tentatives d'examiner l'analogue sphérique de la configuration euclidienne de Thalès). L'importance conceptuelle évidente de ce contenu nécessite certainement l'achèvement de l'étude commencée dans l'article ci-mentionné. D'autre part, les *Sphériques* de l'*Istikmāl* contiennent deux chapitres couvrant une partie considérable des *Sphériques* de Théodose et de Ménélaüs. En partant de cette double richesse des *Sphériques* d'Ibn Hūd et en se basant sur les résultats établissant la correspondance entre les contenus des livres de chacun de ces trois auteurs (voir [Hogendijk 1991] et [Al-Houjairi 2005, p. 18-19, p. 69-70, p. 352-353]), nous estimons que la tâche de constitution d'un dossier « satisfaisant » sur les sphériques à l'époque d'Ibn Hūd (deuxième moitié du onzième siècle), nécessiterait la rédaction de quatre études supplémentaires. Ces études seraient basées sur des échantillons manuscrits convenablement choisis des textes sphériques disponibles (Ibn 'Irāq, Ibn Hūd, al-Tūsī (1201-1274) et autres). De telle manière que, outre les études déjà publiées, le dossier planifié renferme les titres suivants : 1) Les propositions III. 22-25 des *Sphériques* de Ménélaüs dans les commentaires des géomètres de la *Tradition Arabe* (Ibn 'Irāq, Ibn Hūd, al-Tūsī…). 2) Les *Sphériques* de Théodose d'après les commentaires d'Ibn Hūd. 3) Les *Sphériques* de Ménélaüs d'après les commentaires d'Ibn Hūd. 4) L'analyse des cas des propositions des *Sphériques* de Théodose et de Ménélaüs qui manquent à la liste de l'*Istikmāl* (en particulier, la proposition III. 5 de Ménélaüs).

2. Émergence de la trigonométrie et le théorème des sinus

Les recherches astronomiques et cartographiques durant les IX^e^ et X^e^ siècles furent à l'origine d'un développement remarquable en géométrie sphérique. Les méthodes inventées pour résoudre les problèmes métriques des arcs sur la surface sphérique ont abouti, à la fin du X^e^ siècle, à l'émergence d'une nouvelle discipline mathématique indépendante de l'astronomie, de la cartographie et de la géométrie : la trigonométrie, et à une réforme importante de la géométrie sphérique. Une fois libérés du théorème de Ménélaüs, les géomètres comme al-Khujandī (mort en 1000), al-Būzjānī (940-998) et Ibn 'Irāq ont en effet accumulé des résultats : les formules usuelles de la trigonométrie, le triangle polaire, etc. [Debarnot 1985, 2002]. Après ceux-ci, al-Bīrūnī (973-1041) et Nasīr al-Dīn al-Tūsī menèrent cette recherche trigonométrique plus loin. En géométrie sphérique, Ibn al-Haytham (965-1040) introduisit des méthodes infinitésimales, en assimilant les triangles sphériques « suffisamment petits » à des triangles rectilignes [Rashed 2006]. À côté de ces savants à l'avant-garde de la recherche, d'autres mathématiciens ont continué à étudier l'héritage des anciens : ils ont enrichi le contenu mathématique et amélioré les méthodes. Le mathématicien saragocien, Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd (mort en 1085 [478 H.]) appartient à cette dernière catégorie des mathématiciens. S'appuyant sur ses prédécesseurs, il développe, dans son livre intitulé *al-*

Istikmāl (*La Complétion ou bien La Perfection*), une « théorie classique » – plutôt d'aspect pédagogique – des géométries sphériques de Théodose et de Ménélaüs.

Avant la découverte indépendante du théorème des sinus, à la fin du X^{e} siècle, par trois géomètres de la *Tradition Arabe* : al-Khujandī, al-Būzjānī et Ibn 'Irāq[1], toute la géométrie sphérique reposait en principe sur le théorème III. 1 des *Sphériques* de Ménélaüs. Bien que ce dernier ait introduit le concept du triangle (trilatère) sphérique, nous remarquons que le théorème mentionné a imposé le quadrilatère sphérique (et non pas le triangle) comme « unité » de manipulation géométrique : pour résoudre des problèmes sphériques – en l'absence du théorème des sinus –, les géomètres étaient obligés d'introduire, à chaque fois, des constructions géométriques supplémentaires dépendant du problème posé et d'appliquer régulièrement le théorème de Ménélaüs. Les caractéristiques métriques invariantes du « *trilatère sphérique* », ainsi que la loi fondamentale de « *dualité* » régissant le rapport existant entre ses éléments géométriques (angles et côtés), sont formulées adéquatement par le théorème découvert des sinus. Cette découverte fut évidemment à l'origine des changements substantiels en mathématiques. Nous nous contenterons de mentionner deux changements observés en géométrie sphérique : 1) le quadrilatère est remplacé, presque partout, par le triangle comme « unité corpusculaire » adoptée dans la déduction géométrique sur l'étendue de la sphère ; 2) les démonstrations sphériques sont considérablement réduites grâce à l'élimination des constructions géométriques supplémentaires et occasionnelles qui étaient autrefois nécessaires pour satisfaire les conditions de validité du théorème de Ménélaüs, dans les cas des différents problèmes géométriques abordés. Notons qu'Ibn 'Irāq a nommé le théorème des sinus « la figure qui dispense, *al-shakl al-mughnī* », visant par cette dénomination à mettre l'accent sur la réduction mentionnée dans les démonstrations sphériques, due à l'application du théorème des sinus à la place de celui de Ménélaüs appelé « *la figure secteur, al-shakl al qattā*' ». (Voir *infra* les commentaires d'Ibn 'Irāq des démonstrations de Ménélaüs. [commentaires d'Ibn 'Irāq 1 ; 2 ; 3]).

3. Sphériques de l'Istikmāl d' **Ibn Hūd**

Le volumineux livre mathématique de l'*Istikmāl* est donc attribué[2] au mathématicien andalou Abū 'Amir Yūsuf ibn Hūd Ahmad ibn Hūd, dit al-Mu'taman[3]. Les données sûres, à partir desquelles nous pourrions établir la biographie d'Ibn Hūd comme mathématicien, sont actuellement insuffisantes. Il est bien connu qu'al-Mu'taman est

[1] À propos de la discussion engagée sur la priorité de découverte du théorème des sinus, voir [Debarnot 1985].

[2] Voir : *al-Akfānī*, *Irshād al-qāsid ilā asnā al-maqāsid*, dans [Witkam 1959, p. 54 du texte arabe], qui cite « l'*Istikmāl* d'al-Mu'taman ibn Hūd ».

[3] Sur la vie et les écrits d'Ibn Hūd, voir , [Hogendijk 1991], [Rashed 1996, p. 976-978], [Djebbar 1997] et [Al-Houjairi 2005, p. 1-4, p. 354-356].

décédé en 1085 (478 H.) après avoir gouverné Saragosse pendant quatre ans, de 1081 à 1085 [Ibn al-Abbār 1963, p. 248]. R. Rashed écrit : « l'attribution de l'*Istikmāl* à Ibn Hūd est de l'ordre de la certitude. Il reste toutefois qu'en l'absence de preuve directe, la grande prudence s'impose : aucun manuscrit de l'*Istikmāl*, ou plutôt de l'une ou de l'autre partie de celui-ci, ne porte le nom d'Ibn Hūd. » [Rashed 1996, p. 976]. L'*Istikmāl* est un « manuel encyclopédique » en mathématiques ; la diversité de ses thèmes couvre tous les domaines des mathématiques classiques à l'époque d'Ibn Hūd[4]. Ce livre porte sur l'arithmétique, la géométrie euclidienne, la théorie des nombres amiables, la géométrie des sections coniques et la géométrie sphérique. Le contenu de l'*Istikmāl* est emprunté massivement, et parfois littéralement, à Euclide, Théodose de Tripoli, Ménélaüs, Apollonius, Ibn Qurra, Ibn al-Haytham, al Nayrīzī et aux autres. Il semble que cette « encyclopédie mathématique » ait été écrite à des fins plutôt « pédagogiques » qu'inventives[5], elle devait être destinée aux lecteurs instruits en mathématiques sans être eux-mêmes forcément des mathématiciens créatifs, particulièrement aux philosophes avec lesquels, comme Sā'id al-Andalusī nous en a informés, Ibn Hūd avait bien des intérêts communs[6].

L'*Istikmāl*[7] contient deux chapitres sur la géométrie sphérique[8]. Ces chapitres occupent les folios 76^{v}-90^{v} du manuscrit « Copenhague, Or 82 »[9]. Au début de la partie du

[4] Al-Qiftī écrit à propos de ce livre : « al-*Istikmāl* est d'Ibn Hūd en science mathématique, c'est un beau livre sommaire qui nécessite une épreuve. » [Al-Qiftī 1908, p. 319]

"..الاستكمال لابنِ هود في عِلْمِ الرِياضَةِ وَهُو كِتابٌ جامِعٌ جَميلٌ يَحْتاجُ إلى تَحْقيقٍ.."

[5] Par exemple, dans la partie de géométrie sphérique, Ibn Hūd ne mentionne nulle part le théorème des sinus, établi à l'époque d'Ibn Irāq (mort en 1036), une quarantaine d'années avant l'apparition de l'*Istikmāl*. Ce fait serait certainement bien compris si l'on acceptait que, même à l'époque d'Ibn Hūd, le théorème des sinus représentait aussi un saut scientifique très avancé, par comparaison avec le contenu classique hérité de la géométrie sphérique grecque.

[6] Sā'id al-Andalusī mentionne ce que 'Abd al-Raḥmān ibn Sayyid dit : « Quant à Abū 'Āmir ibn al-Amīr ibn Hūd, alors qu'il participe avec ceux-ci (on entend les mathématiciens contemporains de Sā'id al-Andalusī) à la science mathématique, il se distingue parmi eux par la science de la logique, par le soin de la science physique et de la métaphysique. » [al-Andalusī 1985, p. 181].

"وأمّا أبو عامر ابنُ الأمير ابن هود، فَهُوَ مَع مُشارَكَتِهِ لِهَؤلاءِ في العِلْم الرياضِيّ مُنْفَرِدٌ دونَهُم بِعِلْمِ المنطِقِ والعِنايَةِ بِالعِلْمِ الطَبيعيّ والعِلْمِ الإلهي"

[7] « Pour l'heure, il existe en fait les fragments suivants de l'*Istikmāl* : 1) Les parties géométriques de loin les plus substantielles, dans le manuscrit Or. 82 de la Bibliothèque Royale de Copenhague et le manuscrit Or. 123-a de Leyde. 2) Le fragment arithmétique dans le manuscrit du Caire, Dār al-Kutub, Riyāda 40. Une copie de ce manuscrit et de lui seul [...] se trouve à Damas, Zāhiriyya 5648. 3) Enfin le court fragment cité par un commentateur dans un manuscrit de la Bibliothèque Osmaniyye d'Hyderabad [...]. À l'exception de ce dernier fragment où l'*Istikmāl* est cité, aucun ne mentionne ni le titre, ni l'auteur ». Voir [Rashed 1996, p. 976, note 5].

[8] Le texte sur la géométrie sphérique de l'*Istikmāl* est transmis par un seul manuscrit, coté Or. 82 à la Bibliothèque Royale de Copenhague. Nous notons que, dans les propositions mathématiques, le copiste a écrit les lettres qui désignent les points des figures, comme on les prononce – a : alif, b : bā', etc. –. Nous nous sommes permis d'écrire les lettres comme telles et non pas comme on les prononce, par raison d'économie et parce qu'il n'y a aucune confusion à craindre.

[9] Par la suite, cette référence sera désignée par « les *Sphériques* d'Ibn Hūd ».

manuscrit[10] qui concerne la géométrie sphérique, Ibn Hūd expose son plan de travail ultérieur ; il y décrit une classification des objets sphérico-géométriques abordés. Il écrit :

> La seconde espèce de la quatrième espèce sur les propriétés des sphères et des sections qui y sont engendrées sans que les unes soient rapportées aux autres. Elle se partage en deux chapitres : le premier porte sur les propriétés des cercles situés dans la sphère sans que les uns soient rapportés aux autres, le second sur les propriétés des cercles des sphères, de leurs arcs et de leurs cordes rapportés les uns aux autres. [Ibn Hūd, folio 76v]
>
> "النَوْعُ الثاني مِنَ النَوْعِ الرابِعِ في خَواصِّ الأُكَرِ والقُطوعِ الحادِثَةِ فيها مِنْ غَيْرِ إضافَةِ بَعْضِها إلى بَعْض، وَهُوَ يَنْقَسِمُ إلى فَصْلَيْنِ: الفَصْلِ الأوّلِ في خَواصِّ الدَوائِرِ الواقِعَةِ في الكُرَةِ، مِنْ غَيْرِ إضافَةِ بَعْضِها إلى بَعْض، والفَصْلِ الثاني في خَواصِّ دَوائِرِ الأُكَرِ وقِسِيِّها وَأَوْتارِها بِحَسبِ إضافَةِ بَعْضِها إلى بَعْض".

Nous avons constaté la perte d'une grande partie du premier chapitre[11] ; et sa restauration pose un problème sérieux et difficile à résoudre de façon univoque, car toute restauration possible suppose l'adoption d'une conjecture probable. Les commentaires marginaux du manuscrit, qui auraient pu aider au processus de restauration, sont contradictoires[12]. Quant au deuxième chapitre, il semble qu'il y ait deux paragraphes perdus ainsi qu'une partie du troisième paragraphe.

Quelques paragraphes du texte manuscrit d'Ibn Hūd renferment plusieurs propositions. Nous avons estimé qu'il était raisonnable de séparer les propositions mentionnées par une numérotation auxiliaire qui n'influe pas sur la numérotation des paragraphes initialement adoptée par l'auteur. Les propositions principales (commentaires) sont numérotées à l'aide du symbole (n°). Les propositions intermédiaires de ce type citées au cours de l'étude suivante sont traitées en détail dans notre thèse doctorale [Al-Houjairi 2005]. À noter que, tout au long de notre étude, les *Éléments* d'Euclide (IIIe siècle av. J.-C.) [Euclide 1993][13] et les *Sphériques* de Ménélaüs [Ibn 'Irāq 1998][14], vont nous servir de références de comparaison. Dans le dernier livre, nous utiliserons la numérotation adoptée pour le texte manuscrit arabe.

En apportant la rectification minimale nécessaire dans le commentaire historico-mathématique qui suit, nous reproduisons, pour les échantillons manuscrits choisis, la démarche de l'auteur en utilisant parfois des notations et des conceptions mathéma-

---

[10] Voir la description de ce manuscrit par R. Rashed [Rashed 1996, p. 980-981].
[11] Nous notons que la perte a déjà été signalée par J. P. Hogendijk. [Hogendijk 1991].
[12] Voir l'analyse des notes marginales dans [Al-Houjairi 2005, p. 48-51].
[13] Par la suite, cette référence sera désignée par « les *Éléments* d'Euclide ».
[14] Ce traité, perdu en grec, nous est parvenu dans une version en arabe due à Ibn 'Irāq. Par la suite, cette référence sera désignée par « les *Sphériques* de Ménélaüs-Ibn 'Irāq ».

tiques modernes et en y ajoutant des figures géométriques, afin de rendre la manipulation démonstrative accessible.

Il nous reste à exposer brièvement le résumé de notre précédente étude, afin de faciliter la lecture de cet article[15].

Dans la géométrie euclidienne, nous trouvons le résultat suivant : si l'une de deux droites concourantes obliques est coupée orthogonalement par des droites, alors le rapport des segments de droites découpés sur les droites concourantes est un rapport invariant.

Dans la proposition III. 11 de ses *Sphériques*, il semble que Théodose tente d'examiner une configuration similaire sur l'étendue de la sphère. Voici l'énoncé de la proposition III. 11 de Théodose (Fig. A1) :

> Si le pôle de parallèles est situé sur la circonférence d'un cercle le plus grand, que coupent à angles droits deux cercles les plus grands, dont l'un est un des parallèles, et dont l'autre est oblique sur les parallèles ; et si un autre cercle le plus grand, passant par les pôles des parallèles, coupe le cercle oblique entre le plus grand des parallèles et celui qui touche le cercle oblique, le rapport du diamètre de la sphère au diamètre du cercle que touche le cercle oblique est plus grand que celui de l'arc du plus grand des parallèles, situé entre le cercle le plus grand primitif et le cercle consécutif passant par les pôles, à l'arc du cercle oblique situé entre ces derniers cercles. [Théodose 1959, p. 111-112]

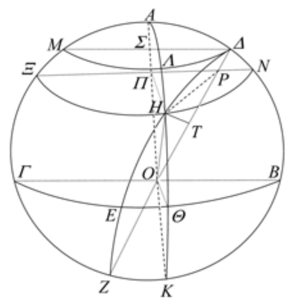


Fig. A1

Dans cette proposition, à l'aide d'une démarche « extrinsèque » euclidienne, Théodose démontre une certaine inégalité sur le rapport de deux arcs particulièrement choisis sur deux quadrants des circonférences de deux grands cercles inclinés, où l'un de ces

[15] Dans les commentaires mathématiques, nous avons eu recours aux abréviations suivantes : *arc(AB)* (l'arc *AB*) ; *arc(C)* (la circonférence du cercle *(C)*) ; *diam(C)* (le diamètre du cercle *(C)*) ; *sgm(AB)* (le segment de droite *AB*) ; *crd(AB)* (la corde de *arc(AB)*) ; *hem(A)* (l'hémisphère de sommet le point *A*) ; *cercle(AB)* (un cercle qui passe par les points *A* et *B*) ; *hom(AB)* (homologue de *arc(AB)* ; *Sin(AB)* (Sinus de *arc(AB)* ; par définition : *hom(AB) = crd(*2 *arc(AB)))* et *Sin(AB)* = ½ *crd(*2 *arc(AB))* = ½ *hom(AB) = R sin(AB)*, où *R* est le rayon du cercle et *sin(AB)* est le sinus au sens actuel) ; *angle(ABC)* (l'angle *ABC)* ; *extr(A)* (l'angle extérieur au sommet *A*) ; par *drt,* nous désignons un angle droit ou bien un quadrant d'un cercle. < > Ces crochets isolent dans le texte arabe ce qui est ajouté pour combler une lacune dans le manuscrit. Dans la traduction française, ils sont maintenus seulement pour les titres ; ils sont introduits pour isoler un ajout au texte arabe, nécessaire à la compréhension du texte français. [ ] Ces crochets sont utilisés seulement dans le texte arabe pour indiquer que les mots ou les passages, ainsi isolés, doivent être supprimés pour assurer la cohérence du texte. / Ce signe indique la fin du folio d'un manuscrit.

arcs est le « projeté orthogonal » de l'autre. Il démontre notamment l'inégalité : $d/d\Delta > \mathrm{arc}(\Theta B)/\mathrm{arc}(H\Delta)$, où d est le diamètre de la sphère (S) et $d\Delta = \mathrm{diam}[\mathrm{cercle}(\Delta\Lambda M)]$. Nous résumons cette proposition de la manière suivante.

Considérons la configuration représentée sur la Fig. A1 :

1. le point A est le pôle des cercles parallèles : *cercle(ΔΛM)*, *cercle(NHΞ)* et *cercle(BEΓ)* (ce dernier cercle est le plus grand des parallèles) ;
2. *cercle(ABΓ)* est perpendiculaire aux parallèles ;
3. *cercle(ΔEZ)* est incliné sur les parallèles, mais il est perpendiculaire à *cercle(ABΓ)* ;
4. H est un point arbitraire sur l'arc mineur, *arc(ΔE)* (qui est un quadrant d'une circonférence de grand cercle) ;
5. le point Θ est le « projeté orthogonal » sphérique du point H sur l'arc mineur *arc(EB)* (qui est un quadrant d'une circonférence de grand cercle).

Sous ces conditions nous aurons :

$$arc(B\Theta)/arc(\Delta H) < d/d_\Delta.$$

La démonstration de Théodose se développe comme suit : HP est sur l'intersection des plans des cercles $NH\Xi$ et ΔEZ qui sont orthogonaux, chacun, au plan du grand cercle $AB\Gamma$, donc HP est orthogonal à OP et à $P\Pi$. Le triangle $O\Pi P$ est rectangle en Π, donc $OP > \Pi P$; soit T un point de OP tel que $PT = \Pi P$, donc les deux triangles rectangles HPT et $HP\Pi$ sont égaux, d'où $angle(H\Pi P) = angle(HTP)$. Le triangle HPO est rectangle en P ; nous avons donc $OP/PT > angle(PTH)/angle(POH)$[16]. Nous avons

$$PT = P\Pi \text{ et } angle(PTH) = angle(\Theta OB),$$

par suite

$$OP/P\Pi > angle(\Theta OB)/angle(POH).$$

Mais puisque

$$O\Delta\,/\,\Delta\Sigma = \Delta Z/\Delta M = PO\,/\,P\Pi \text{ et } \Delta Z = d,\ \Delta M = d_\Delta,$$

nous aurons donc

$$d/d_\Delta > arc(\Theta B)/arc(H\Delta).$$

[16] Ce passage n'est pas justifié par Théodose. (Voir [Rashed et Al-Houjairi 2010, p. 230-241.])

Un siècle et demi environ plus tard, Ménélaüs reprend le problème, dans la proposition III. 22 de ses Sphériques (voir [Ibn ʿIrāq 1998, p. 97-98] et [Ibn ʿIrāq, MSb, folios 50v-52r]), mais avec quelques modifications : il considère la situation plus générale des deux arcs des deux grands cercles inclinés où l'un de ces deux arcs est le « projeté orthogonal » de l'autre ; il démontre l'égalité du rapport des Sinus des arcs au rapport des deux surfaces rectangulaires, qui dépendent du diamètre de la sphère, des diamètres des cercles qui passent parallèlement au plan du cercle de projection par les extrémités de l'arc projeté et du diamètre du cercle qui est tangent à l'un des cercles inclinés et parallèle à l'autre. L'énoncé de cette proposition s'écrit comme suit (Fig. A2) :

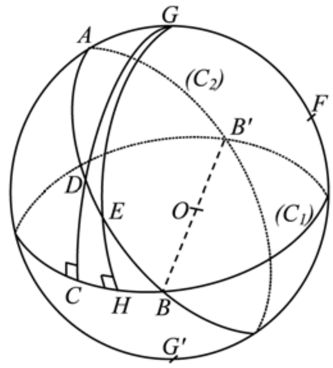


Fig. A2

"**الشَكْلُ الثاني والعشرون،**

إذا كانَت في بَسيطِ كُرَةٍ دائِرتانِ مِنَ الدَوائرِ العِظامِ وكانَت كُلُّ واحدةٍ مِنْهُما مائِلَةً على الأُخْرَى وتُعلِّم على إحْداهُما[1] نُقْطَتان غَيْرُ مُتَقابِلَتَيْنِ[2] على القُطْرِ وأُخْرِجَ مِنْهُما إلى الدائِرَةِ الأُخْرَى /[٥١و] عَمودانِ، فإنّ نِسْبَةَ جَيْبِ القَوْسِ الواقِعَةِ فيما بَيْنَ مَسْقَطَيِ العَمودَيْنِ إلى جَيْبِ القَوْسِ الّتي فيما بَيْنَ النُقْطَتَيْنِ اللّتينِ تُعلِّمتا كَنِسْبَةِ السَطْحِ القائِمِ الزوايا الّذي يُحيطُ بِهِ قُطْرُ الكُرَةِ وَقُطْرُ الدائِرَةِ التي تُماسُّ إحْدَى الدائِرَتَيْنِ وَتُوازي الدائِرَةَ الأُخْرى، إلى السَطْحِ القائِمِ الزوايا الّذي يُحيطُ بِهِ قُطرا[3] الدائِرَتَيْنِ اللّتَيْنِ تَمرّانِ بالنُقْطَتَيْنِ

Si, sur la surface d'une sphère, deux grands cercles sont inclinés l'un sur l'autre ; et si l'on marque, sur l'un d'eux, deux points non diamétralement opposés, d'où l'on mène à l'autre cercle, /[51r] deux perpendiculaires ; alors le rapport du Sinus de l'arc situé entre les pieds des deux perpendiculaires, au Sinus de l'arc situé entre les deux points marqués, est comme le rapport du rectangle entouré par le diamètre de la sphère et le diamètre du cercle qui est tangent à l'un des deux cercles et qui est parallèle à l'autre, au rectangle entouré par les diamètres des deux cercles qui passent par les deux points marqués sur l'un des deux cercles, et qui sont parallèles à l'autre cercle. » (Voir [Ibn ‘Irāq 1998, proposition III. 22, p. 97-98] [17] et [Ibn ‘Irāq, MSb, folios 50^v-52^r].)

اللّتَيْنِ تُعلِّمتا على إحْدَى الدائِرَتَيْنِ العَظيمَتَيْنِ وَتُوازِيانِ[٤] الدائِرَةَ الأُخْرَى مِنْهُما."

١. إحداهما: إحديهما؛ ٢. متقابلتين: متقابلين؛ ٣. قطرا: قطر؛ ٤. توازيان: توازي.

Dans cette proposition reprise par Ibn Hūd (voir [Ibn Hūd, folio 89^r] et [Rashed et Al-Houjairi 2010, p. 223, note 28]), nous considérons (voir la Fig A2), dans une sphère *(S)* de diamètre *d* et de centre *O*, un grand cercle *(C_1)* de pôles *G* et *G'* et nous désignons par *(C_2)* un autre grand cercle oblique sur *(C_1)* et de pôle *F*. Nous marquons sur la circonférence de *(C_2)*, deux points *D* et *E* qui ne sont pas diamétralement opposés. Nous traçons les demi-circonférences *arc(GDG')* et *arc(GEG')* qui coupent *arc(C_1)*, respectivement, aux points *C* et *H*. Nous désignons, par *B* et *B'* les points d'intersection de *arc(C_1)* et *arc(C_2)*, par *A* le point d'intersection de *cercle(FGG')* avec *arc(C_2)*, qui est situé sur *hem(G)* et par d_A, d_D et d_E les diamètres des cercles qui passent, respectivement, par les points *A*, *D* et *E* et qui sont parallèles à *(C_1)*. Sous les conditions considérées, Nous démontrons que

$$hom(HC) / hom(DE) = (d\, d_A) / (d_D\, d_E).$$

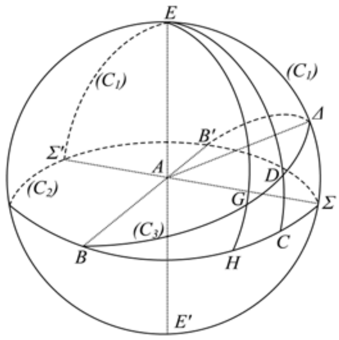
S'appuyant sur cette proposition, Ménélaüs établit, dans les propositions III. 23-25 (voir [Ibn ‘Irāq 1998, p. 101-103, 105-106] et [Ibn ‘Irāq, MSb, folios : 52^v-53^v, 55^r-55^r]) de ses *Sphériques*, quelques inégalités relatives aux arcs considérés, mais il commet quelques erreurs aussi bien dans l'énoncé de la proposition III. 25, que dans les démonstrations des propositions III. 24 et III. 25. Ibn ‘Irāq rectifie ces erreurs, rétablit les démonstrations de Ménélaüs (voir [Ibn ‘Irāq 1998, p. 103-110] et [Ibn ‘Irāq, MSb, folios : 53^r-57^r]) et généralise la proposition III. 11 de Théodose. (Voir [Ibn ‘Irāq 1998, p. 104] et [Ibn ‘Irāq, MSb, folios : 54^r-54^v].)

Dans une proposition de l'*Istikmāl*, Ibn Hūd expose une nouvelle démonstration « *intrinsèque* » de la généralisation faite par Ibn ‘Irāq de la proposition III. 11 de Théodose et reprend les trois propositions III. 23-25 de Ménélaüs. Nous pouvons réécrire l'énoncé de cette proposition d'Ibn Hūd de la manière suivante (voir [Ibn Hūd, folio 89^r-90^v] et [Rashed et Al-Houjairi 2010]) :

[17] Voir l'énoncé de cette proposition reprise plus tard par Ibn Hūd. [Ibn Hūd, folio 89^r].

Proposition d'Ibn Hūd. (Fig. A3)

Soient, dans une sphère (*S*) centrée au point *A* et de diamètre *d*, deux grands cercles (C_2) et (C_3) et soit (C_1) le grand cercle qui passe par les pôles de (C_2) et (C_3). Désignons par *Δ* et *Δ'* les points d'intersection de *arc*(C_1) et *arc*(C_3), par *Σ* et *Σ'* les points d'intersection de *arc*(C_1) et *arc*(C_2), par *B* et *B'* les points d'intersection de *arc*(C_2) et *arc*(C_3) et par *E* et *E'* les pôles de (C_2). Pour fixer les idées, supposons que le point *Δ* soit sur l'arc mineur, *arc(EΣ),* et considérons, sur le quadrant *arc(BΔ)*, deux points *G* et *D (G* est entre *B* et *D)*. Traçons les demi-circonférences *arc(EGE')* et *arc(EDE')* qui coupent le quadrant *arc(BΣ)*, respectivement, aux points *H* et *C*.



Ultérieurement, pour un point *M* de *arc(BΔ)*, nous désignerons par d_M le diamètre du cercle passant par le point *M* parallèlement à (C_2) et par <u>*M*</u> (*M* souligné*)* le point d'intersection de *arc(EME')* avec *arc(BΣ)*.

Ibn Hūd démontre alors les assertions suivantes :

a) $arc(HC) / arc(GD) < d / d_D$,

b) $arc(HC) / arc(GD) > d_\Delta / d_G$,

c) $arc(HC) > arc(GD) \Rightarrow arc(HC) / arc(GD) > d\, d_\Delta / d_D\, d_G$,

d) $arc(HC) < arc(GD) \Rightarrow arc(HC) / arc(GD) < d\, d_\Delta / d_D\, d_G$,

e) $D \equiv \Delta$[18] $\Rightarrow arc(HC) / arc(GD) > d / d_G$,

f) soit *P* un point de *arc(BΔ)* ; posons $\underline{P} = Q$;

si $hom(EP) / d = hom(E\Delta) / hom(EP)$, alors *P* vérifie les propriétés suivantes :

f1) si le point *G* appartient à l'arc ouvert *arc(BP)* et si $H = \underline{G}$, $arc(HQ) < arc(GP)$,

f2) si le point *U* appartient à l'arc ouvert *arc(PΔ)* et si $O = \underline{U}$, $arc(OQ) > arc(UP)$.

[18] Dans ce cas $C \equiv \Sigma$.

I. THÉORÈME DE MÉNÉLAÜS ET SES CONSÉQUENCES DANS L'*ISTIKMĀL*

Par la suite, nous exposons les commentaires, la traduction française et les textes manuscrits établis des propositions de l'*Istikmāl* qui correspondent aux six propositions : III. 1-4, III. 6-7 des *Sphériques* de Ménélaüs.

I.1. La proposition III. 5 de Ménélaüs manque à la liste d'Ibn Hūd

Notons tout d'abord que la proposition III. 5 de Ménélaüs manque à la liste d'Ibn Hūd.

Il faut remarquer que c'est précisément ici (dans la démonstration de cette proposition attribuée à Ménélaüs), nous rencontrons - pour la première fois dans l'histoire connue - l'introduction d'une égalité des rapports de la forme

$$\frac{Si\ \widehat{A\,A}}{Sin A_1 A_4} : \frac{Si\ \widehat{A\,A}}{Sin A_2 A_4} = \frac{Si\ \widehat{B\,B}}{Sin B_1 B_4} : \frac{Si\ \widehat{B\,B}}{Sin B_2 B_4} .$$

Cette égalité introduite et utilisée, sans justification par Ménélaüs, exprime, en fait, la propriété d'invariance du rapport anharmonique de quatre circonférences de grands cercles, issues d'un point commun M et qui coupent les circonférences de deux autres grands cercles $B_1B_2B_3$ et $A_1A_2A_3$. (Voir la Fig. A4).

La proposition III. 5 était le thème d'une polémique intensive durant longtemps dans la *Tradition Géométrique* Arabe. Elle a été abordée par plusieurs géomètres : al-Māhānī (mort entre 874 et 880), al-Harawī (930?-990?), Ibn 'Irāq, Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, etc. Ibn 'Irāq lui-même avait traité cette proposition à deux reprises et dans deux travaux séparés. (Voir [Ibn 'Irāq, MSa, folios 75v-78r] et [Ibn 'Irāq, MSb, folios 36r-38v].) Dans ces écrits, Ibn 'Irāq expose l'historique de la proposition, la preuve de Ménélaüs, ainsi que sa propre démonstration basée sur le théorème de sinus. (Voir [Samsò 1969].)

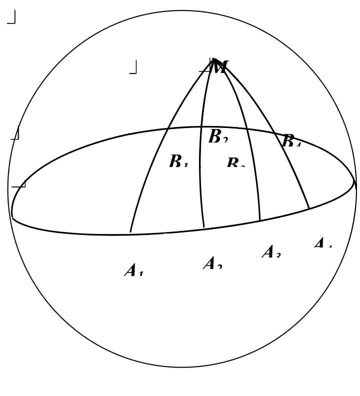


Fig. A4

À propos de **l'historique de cette proposition**, Ibn 'Irāq a écrit :

J'ai pensé qu'al-Māhānī était mort avant l'achèvement de ce qu'il a entamé de rectification du livre des *Sphériques* de Ménélaüs, qu'un accident était survenu et qu'il n'avait pas pu avec mener à bien son plan ; jusqu'à ce que j'ai lu ce qu'Abū-l-Fadl al-Harawī a apporté de rectification à ce livre. J'ai trouvé qu'il y mentionne, dans l'introduction, qu'un groupe de géomètres auraient voulu rectifier ce livre. Lorsqu'ils n'ont pas pu le faire, ils ont demandé l'aide à al-Māhānī qui, après avoir rectifié le premier chapitre et une partie du second, s'est arrêté, confronté à une proposition dont on a mentionné qu'elle est difficile à aboutir et à prouver. Puis Abū-l-Fadl al-Harawī a montré cette proposition, mais il a suivi dans sa <démonstration> une démarche différente de celle de Ménélaüs. Bien que j'aie eu moi-même l'intention de rectifier ce livre, lorsque j'ai lu ce qu'Abū-l-Fadl a mentionné, j'ai décidé de montrer tout d'abord cette proposition selon la manière qui convient à la démarche de Ménélaüs dans son livre. C'est ce qu'il a mentionné : Ménélaüs a dit : si deux figures trilatères sont telles que deux angles <respectifs> parmi les angles à leurs deux bases sont égaux et aigus et deux angles <respectifs> parmi les angles restants sont droits, et si chacun de leurs deux côtés qui sous-tendent les deux angles restants est inférieur à un quadrant, alors le rapport de l'homologue de la somme de deux arcs entourant l'angle

"قالَ أبو نَصْرٍ: إنّي كُنْتُ أظُنُّ أنّ الماهانِيّ اختَرَمَ قَبْلَ إتْمامِ ابْتِدَائه مِنْ إصْلاحِ كِتابِ مانالاوس في الكُرِيّاتِ وأنّ شَيْئاً عَرَضَ لَمْ يَتَمَكّنْ مَعَهُ مِنْ إكْمالِ الغَرَضِ، إلى أنْ نَظَرْتُ فيما عَمِلَهُ أبو الفَضْلِ الهَـرَوِيُّ مِنْ إصْلاحِ هذا الكِتابِ فَوَجْدْتُهُ يَقولُ في صَدْرِهِ إنّ جَماعَةً مِنَ الـمُهَنْدِسينَ راموا تَصْحيحَ هَذا الكِتابِ، فَلَمّا لَمْ يَقْدِروا عَلَيْهِ استَعانوا بِالماهانيّ فَأصْلَحَ المقالَةَ الأُولَى وَبَعْضَ الثانِيَةِ، وَوَقَفَ عِنْدَ شَكْلٍ، ذَكَروا أنّه صَعْبُ المرامِ عَسيرُ البَيان. ثُمّ بَيَّنَ أبو الفَضْلِ الهَرَوِيُّ ذَلِكَ الشَكْلَ، إلاّ أنّهُ سَلَكَ فيهِ غَيْرَ مَسلَكِ مانالاوس. وأنا وإنْ كُنْتُ أنْوي إصْلاحَ هَذا الكِتابِ، فَأنّي عندما وَقَفْتُ عَلَى ما ذَكَرَهُ أبو الفَضْلِ، رأيْتُ أنْ أُبَيِّنَ هذا الشَكْلَ أوّلاً عَلَى ما يَليقُ بِمَسْلَكِ مانالاوس في كِتابِهِ. وَهَذا هُوَ الّذي ذَكَرَهُ، قالَ مانالاوس : إذا كانَ شَكْلانِ ذَوا[1] ثَلاثَةِ[2] أضْلاعٍ وكانَتْ زاوِيَتانِ مِنْ زَواياهُما الّتي عَلَى قاعِدَتَيْهِما مُتَساوِيَتَيْنِ[3] حادَّتَيْنِ[4] وكانَتْ زاوِيَتانِ مِنْ الزوايا الباقِيَةِ مِنْهُما قائِمَتَيْن[5] وكانَ كُلُّ واحدٍ من ضِلْعَيْهِما اللّذَيْنِ يُوَتِّرانِ[6] زاوِيَتَيْهِما[7] الباقِيَتَيْن أَقَلَّ مِنْ رُبْعِ دائِرةٍ فَإنّ نِسْبَةَ نَظيرِ القَوْسَيْنِ الـمُحيطَتَيْنِ[8] بِالزاوِيَةِ الحادَّةِ مِنْ أحَدِ الشَكْلينِ مَجْموعَتَيْنِ إلى نَظيرِ فَضْلِ ما بَيْنَهُما كَنِسْبَةِ نَظيرِ القَوْسَيْنِ الـمُحيطَتَيْنِ[9] بِالزاوِيَةِ الحادّةِ من الشَكْلِ

الآخَرِ مَجْموعَتَيْنِ إلى نَظيرِ فَضْلِ ما بَيْنَهُما، وَنْعْني بِنَظيرِ القَوْسِ وَتَرَ ضِعفِها. وَنَحْنُ نَسْتَعْمِلُ مَكانَ أوْتارِ الضِعْفِ جُيوبَ القِسِيِّ طَلَباً لِلتَخْفيفِ."

aigu <égal>, de l'une de deux figures, à l'homologue de leur différence, est comme le rapport de l'homologue de la somme de deux arcs entourant l'angle aigu <égal> de l'autre figure, à l'homologue de leur différence. On entend par homologue de l'arc, la corde du double de l'arc. Pour l'allégement, au lieu des cordes des doubles des arcs, nous utilisons les Sinus des arcs. » [Ibn 'Irāq, MSa, folio 75^{v}].

١. ذَوا: ذو؛ ٢. ثَلاثَة: ثلث؛ ٣. مُتَساوِيَتَيْن: متساويتان؛ ٤. حادَّتَيْن: حادتان؛ ٥. قائِمَتَيْن: قائمتان؛ ٦. يُوَتِّران: نوتران؛ ٧. زاوِيَتَيْهِما: زاويتهما؛ ٨. الـمُحيطَتَيْن: المحيطين؛ ٩. الـمُحيطَتَيْن: المحيطين.

L'histoire de la proposition III. 5 est très ramifiée et étendue. Il est indispensable de consacrer à cette histoire une étude séparée. À la fin de cet article, nous nous contenterons d'exposer brièvement la preuve attribuée à Ménélaüs, ainsi que le texte manuscrit correspondant tiré du livre d'Ibn 'Irāq établi et traduit en français.

I.2. Commentaires des paragraphes § 9 - § 14 de Sphériques de l'Istikmāl

§ 9 - Proposition n° 34 .

Soient (C_1) et (C_2) deux grands cercles de la sphère tels que $arc(C_1)$ et $arc(C_2)$ se coupent aux points A et C. Si E et G sont deux points arbitraires situés sur la circonférence $arc(C_1)$, différents de A et C et admettant respectivement les points K et L comme projections orthogonales sur le plan du cercle (C_2), alors

$$(1)\quad \frac{crd(2\,arc(AE))}{crd(2\,arc(AG))} = \frac{sgm(EK)}{sgm(GL)}.$$

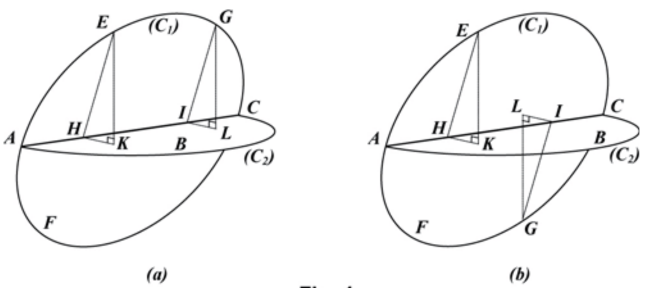


Fig. 1

Preuve.

Les grands cercles (C_1) et (C_2) se coupent suivant leur diamètre commun AC (voir la Fig. 1). Désignons par H et I respectivement les pieds des perpendiculaires abaissées des points E et G sur la droite AC. Si les plans des cercles (C_1) et (C_2) sont perpendiculaires, les points H et I coïncident alors, respectivement, avec K et L[19] et la relation (1) est évidemment satisfaite puisque $crd(2\ arc(AE))$ est égal à $2\,sgm(EH)$ et $crd(2\ arc(AG))$ est égal à $2\,sgm(GI)$.

Supposons, à présent, que les plans des cercles (C_1) et (C_2) ne soient pas perpendiculaires. Par suite, le point H est différent de K et le point I est différent de L ; les deux triangles EHK et GIL sont semblables puisqu'ils ont leurs angles égaux deux à

[19] Les *Éléments* d'Euclide : « Si un plan est perpendiculaire à un autre plan, et si d'un point pris dans un de ces plans, on mène une perpendiculaire à l'autre plan, cette perpendiculaire tombera sur la section commune des plans. » [Euclide 1993, proposition 38, livre XI, p. 441].

deux[20] : *angle(EKH)* et *angle(GLI)* sont des angles droits[21], *angle(HEK)* est égal à *angle(IGL)* [22] et par suite, les angles restants *angle(KHE)* et *angle(LIG)* sont égaux aussi ; donc

$$\frac{sgm(EH)}{sgm(GI)} = \frac{sgm(EK)}{sgm(GL)}.$$

Mais

$$\frac{sgm(EH)}{sgm(GI)} = \frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(AG))},$$

car *sgm(EH)* est égal à *Sin(AE)* et *sgm(GI)* est égal à *Sin(AG)*[23]. En conséquence, nous obtenons

$$\frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(AG))} = \frac{sgm(EK)}{sgm(GL)}.$$

C.Q.F.D.

Marie-Thérèse Debarnot a indiqué qu'un résultat, presque identique à celui de la proposition n° 34, est dû à Thābit ibn Qurra[24]. Ce résultat conduit, selon Debarnot, à une élégante démonstration du théorème III. 1 des *Sphériques* de Ménélaüs [Debarnot 1985, p. 6]. Cette question est abordée également par Hélène Bellosta [Bellosta 2004, p. 145-168, en particulier p. 158].

§ 10 - Proposition n° 35 (Fig. 2, Fig. 3)

Soient sur la sphère, *arc(AB)*, *arc(BC)*, *arc(AD)* et *arc(EC)* quatre arcs non co-planaires deux à deux, de grandes circonférences, plus petits chacun qu'une demi-cir-

[20] *Ibid.* : « Dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels ; et les côtés qui sou-tendent les angles égaux, sont homologues. » [Euclide 1993, proposition 4, livre VI, p. 143].
[21] *Ibid.* : « Une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle fait des angles droits avec toutes les droites qui la ren-contrent, et qui sont dans ce plan. » [Euclide 1993, définition 3, livre XI, p. 396].
[22] Chacun des deux angles est aigu et leurs côtés sont deux à deux parallèles.
[23] Nous notons que c'est l'unique passage dans les *Sphériques* d'Ibn Hūd où nous rencontrons le terme « *Sinus* ». Il utilise au début le terme « *corde de l'arc double* » puis il adopte le terme « *homologue de l'arc* » qui est égal, par la définition introduite par Ibn Hūd, à la « *corde de l'arc double* ».
[24] Voir « Extrait du livre de Thabit-Ben-Korrah : *De la figure du quadrilatère et des rapports composés* », dans [Al-Tūsī 1998], livre 5, page 200-201. Al-Tūsī, expose, dans cet extrait attribué à Thābit ibn Qurra, une démonstration identique à celle d'Ibn Hūd.

conférence d'un grand cercle de la sphère et tels que le point *E* appartienne à *arc(AB)* et le point *D* appartienne à *arc(BC)*.

Si *arc(EC)* et *arc(AD)* se coupent au point *F*, alors les deux relations suivantes sont satisfaites :

$$1)\ \frac{crd(2arc(AB))}{crd(2arc(BE))} = \frac{crd(2arc(AD))}{crd(2arc(DF))} \cdot \frac{crd(2arc(FC))}{crd(2arc(CE))},$$

$$2)\ \frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(BE))} = \frac{crd(2arc(AF))}{crd(2arc(FD))} \cdot \frac{crd(2arc(DC))}{crd(2arc(CB))}.$$

Preuve.

1) Abaissons des points *A*, *E* et *F* les perpendiculaires *sgm(AG)*, *sgm(EH)* et *sgm(FI)* au plan de *cercle(BC)* (voir la Fig. 2). D'après la proposition n° 34, nous avons :

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(EH)} = \frac{crd(2arc(BA))}{crd(2arc(BE))},\ \frac{sgm(AG)}{sgm(FI)} = \frac{crd(2arc(DA))}{crd(2arc(DF))}.$$

et
$$\frac{sgm(FI)}{sgm(EH)} = \frac{crd(2arc(CF))}{crd(2arc(CE))}.$$

En utilisant l'identité $\frac{sgm(AG)}{sgm(EH)} = \frac{sgm(AG)}{sgm(FI)} \cdot \frac{sgm(FI)}{sgm(EH)}$ [25],

nous obtenons

$$\frac{crd(2arc(AB))}{crd(2arc(BE))} = \frac{crd(2arc(AD))}{crd(2arc(DF))} \cdot \frac{crd(2arc(FC))}{crd(2arc(CE))}.$$

[25] Cette identité repose sur la composition des rapports utilisée par Euclide au livre VI des *Éléments*, mais qui ne fait pas l'objet d'une définition explicite. Thābit ibn Qurra consacre un assez long traité à cette « opération » très particulière. (Voir [Crozet 2004]).

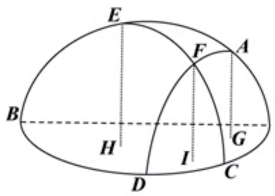


Fig. 2

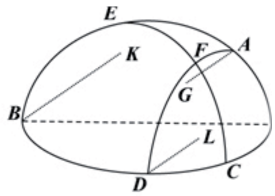


Fig. 3

2) De la même manière, abaissons des points A, B et D les perpendiculaires *sgm(AG)*, *sgm(BK)* et *sgm(DL)* au plan de *cercle(CF)* (voir la Fig. 3). D'après la proposition n° 34, nous avons :

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(BK)} = \frac{crd(2\,arc(AE))}{crd(2\,arc(EB))}, \qquad \frac{sgm(AG)}{sgm(DL)} = \frac{crd(2\,arc(AF))}{crd(2\,arc(FD))}$$

et
$$\frac{sgm(DL)}{sgm(BK)} = \frac{crd(2\,arc(DC))}{crd(2\,arc(CB))}.$$

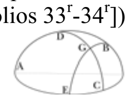
En utilisant l'identité $\dfrac{sgm(AG)}{sgm(BK)} = \dfrac{sgm(AG)}{sgm(DL)} \cdot \dfrac{sgm(DL)}{sgm(BK)}$,

nous obtenons

$$\frac{crd(2\,arc(AE))}{crd(2\,arc(BE))} = \frac{crd(2\,arc(AF))}{crd(2\,arc(FD))} \cdot \frac{crd(2\,arc(DC))}{crd(2\,arc(CB))}.$$

Nous trouvons le même résultat chez Ménélaüs[26], mais avec une démonstration différente.

[26] Les *Sphériques de* Ménélaüs-Ibn ʻIrāq ([Ibn ʻIrāq 1998, livre III, proposition 1, p. 62-64 (du texte arabe), (traduction allemande, p. 194-197)], [Ibn ʻIrāq, MSb, folios 33^r-34^r]) :



§ 11 - Définition n° 1 : la corde du double de *arc(AB)* s'appelle *homologue* de *arc(AB)*.

Proposition n° 36 (*règle de quatre quantités*).

Si *ABC* et *DEG* sont deux triangles sphériques tels que *angle(A)* soit égal à *angle(D)*, alors les assertions suivantes sont satisfaites :

si, soit *angle(C)* est égal à *angle(G)*, soit la somme *angle(C)* + *angle(G)* est égale à deux angles droits, alors

$$\frac{hom(AB)}{hom(BC)} = \frac{hom(DE)}{hom(EG)} ;$$

2) si

$$\frac{hom(AB)}{hom(BC)} = \frac{hom(DE)}{hom(EG)},$$

alors soit *angle(C)* est égal à *angle(G)*, soit la somme *angle(C)* + *angle(G)* est égale à deux angles droits (voir la Fig. 4).

« **Proposition 1** : Les deux arcs CE, BD se coupent au point A. Des deux points C et B on décrit les deux arcs CD et BE qui se coupent au point G. On suppose que chacun de ces quatre arcs soit d'une grande circonférence de la sphère et que chacun soit plus petit qu'une demi-circonférence. Je dis que le rapport du Sinus de l'arc CE au Sinus de l'arc EA est composé du rapport du Sinus de l'arc CG au Sinus de l'arc GD et du rapport du Sinus de l'arc BD au Sinus de l'arc BA. »

"**الشَكْلُ الأوَّلُ** :
قَوْسا ج؟ه ب؟د[1] تَلْتَقِيانِ عَلَى نُقْطَةِ ا وأُخْرِجَ مِنْ نُقْطَتَيْ ج ب قَوْسا ج؟د ب؟ه مُتَقاطِعَتَيْنِ عَلَى نُقْطَةِ ز وَكُلُّ واحِدَةٍ مِنَ هذه القِسِيِّ الأرْبَع مِنْ مُحيطِ دائِرَةٍ عَظيمَةٍ في الكُرَةِ وَكُلُّ واحِدَةٍ مِنْها أصْغَرُ مِنْ نِصْفِ المحيطِ. فَأقولُ إنّ نِسْبةَ جَيْبِ ج؟ه إلى جَيْبِ ه؟ا مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ج؟ز إلى جَيْبِ قَوْسِ ز؟د <ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟د إلى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ا.>"

١. ج؟ه ب؟د :ج؟د ب؟ه

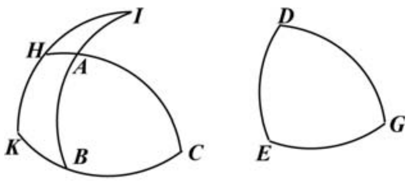


Fig. 4

Preuve.

Considérons deux triangles sphériques *ABC* et *DEG* tels que *angle(A)* soit égal à *angle(D)*. Prolongeons *arc(CA)* du côté de *A* jusqu'au point *H*, de telle manière que *arc(AH)* soit égal à *arc(DG)* ; prolongeons *arc(AB)* du côté de *A* jusqu'au point *I*, de telle manière que *angle(AHI)* soit égal à *angle(EGD)* ; et prolongeons *arc(CB)* et *arc(IH)* respectivement du côté de *B* et *H*, qu'ils se coupent en un point que l'on désigne par *K*. D'après la proposition n° 28 (cas G_1)[27], les deux triangles *EGD* et *IHA* sont égaux puisqu'ils ont *angle(IAH)* égal à *angle(D)*, *angle(IHA)* égal à *angle(G)* et le côté *arc(AH)* égal au côté *arc(DG)*. Donc *angle(AIH)* est égal à *angle(E)*, *arc(HI)* est égal à *arc(GE)* et *arc(IA)* est égal à *arc(ED)*.

1) Supposons, tout d'abord, que *angle(C)* soit égal à *angle(G)*, alors *angle(C)* est égal à *angle(IHA)* puisque ce dernier est égal à *angle(G)*. Par suite, d'après la réciproque de la proposition n° 24[28], la somme *arc(HK)* + *arc(KC)* sera égale à une demi-circonférence de grand cercle[29], c.-à-d. *arc(HK)* et *arc(KC)* sont des arcs supplémentaires et admettent, par conséquent, le même homologue. Supposons maintenant que la somme *angle(C)* + *angle(G)* soit égale à deux angles droits. Donc la somme *angle(C)* + *angle(IHA)* est égale à deux angles droits puisque *angle(G)* est égal à *angle(IHA)*. Mais la somme *angle(CHK)* + *angle(IHA)* est égale à deux angles droits, donc *angle(CHK)* est égal à *angle(C)*. Par suite, d'après la proposition n° 21[30], le côté *arc(HK)* du triangle *HKC* est égal à l'autre côté *arc(KC)* et par conséquent, les deux arcs possèdent le même homologue. Ainsi *hom(HK)* et *hom(KC)* sont égaux, soit

---

[27] « Les deux triangles spériques *ABC* et *DEG* sont égaux si *arc*(*AC*)=*arc*(*DG*), *angle*(*A*)=*angle*(*D*) et *angle*(*C*)=*angle*(*G*) » [Al-Houjairi 2005, proposition n° 28, cas G_1, p. 107].

[28] « Si dans un triangle sphérique *ABC*, *arc(AC)* + *arc(CB)* = 2 *drt* alors *extr(B)* = *angle(A)* » [Al-Houjairi 2005, proposition n° 24, p. 102].

[29] Bien que l'assertion soit vraie indépendamment de ce passage logico-géométrique, cette « déduction » est vraie à condition que la figure *HKC* soit un triangle au sens de Ménélaüs. Il semble qu'Ibn Hūd ainsi que Ménélaüs supposent, implicitement, que la somme *arc(AC)* + *arc(DG)* est plus petite qu'une demi circonférence de grand cercle. Dans le cas contraire, la preuve nécessite un complément de démonstration.

[30] « Dans un triangle sphérique *ABC*, nous avons : *angle(A)* = *angle(B)* ⇔ *arc(AC)* = *arc(BC)* » [Al-Houjairi 2005, propositions n° 20 et n° 21, p. 95, 99].

lorsque *angle*(*C*) est égal à *angle(G)*, soit lorsque la somme *angle(C)* + *angle(G)* est égale à deux angles droits. D'autre part, d'après la proposition n° 35[31], nous avons :

$$(1)\ \frac{hom(IH)}{hom(KH)} = \frac{hom(IA)}{hom(AB)} \cdot \frac{hom(BC)}{hom(CK)}.$$

Mais puisque *hom(CK)* = *hom(KH)*, nous aurons :

$$\frac{hom(IH)}{hom(CK)} = \frac{hom(IA)}{hom(AB)} \cdot \frac{hom(BC)}{hom(CK)},$$

d'où

$$\frac{hom(IH)}{hom(BC)} = \frac{hom(IA)}{hom(AB)}.$$

Et en utilisant les relations

$$arc(IH) = arc(EG) \text{ et } arc(AI) = arc(ED),$$

nous obtenons

$$\frac{hom(EG)}{hom(BC)} = \frac{hom(ED)}{hom(AB)}.$$

En conséquence,

$$\frac{hom(AB)}{hom(BC)} = \frac{hom(DE)}{hom(EG)}.$$

Réciproquement.

2) Supposons que

$$\frac{hom(AB)}{hom(BC)} = \frac{hom(DE)}{hom(EG)}.$$

[31] L'hypothèse de la proposition n° 35 exige que chacun des quatre arcs de la configuration soit plus petit qu'une demi-circonférence de grand cercle. Pour que la démonstration soit acceptable, il faut admettre qu'Ibn Hūd et également Ménélaüs supposent, implicitement, que chacune des sommes *arc(AC)* + *arc(DG)* et *arc(BA)* + *arc(AI)* soit plus petite qu'une demi-circonférence de grand cercle.

Procédons de la même manière que précédemment. Les côtés *arc(DE)* et *arc(EG)* du triangle *EGD* sont respectivement égaux aux côtés *arc(IA)* et *arc(IH)* du triangle *BCA*, donc

$$\frac{hom(BC)}{hom(AB)} = \frac{hom(IH)}{hom(IA)} \text{ , ou bien } \frac{hom(IH)}{hom(BC)} = \frac{hom(IA)}{hom(AB)} \; .$$

En « multipliant les deux membres de l'égalité » par $\frac{hom(BC)}{hom(CK)}$, nous obtenons (voir la note 25 [la composition des rapports])

$$\frac{hom(IH)}{hom(BC)} \cdot \frac{hom(BC)}{hom(CK)} = \frac{hom(IA)}{hom(AB)} \cdot \frac{hom(BC)}{hom(CK)} \; .$$

Mais d'après la proposition n° 35[32], nous avons :

$$\frac{hom(IA)}{hom(AB)} \cdot \frac{hom(BC)}{hom(CK)} = \frac{hom(IH)}{hom(KH)},$$

donc,

$$\frac{hom(IH)}{hom(KH)} = \frac{hom(IH)}{hom(BC)} \cdot \frac{hom(BC)}{hom(CK)}$$

et par suite, *hom(KH)* est égal à *hom(CK)*. Ainsi, ou bien *arc(KH)* est égal à *arc(CK)*, ou bien la somme *arc(KH)* + *arc(CK)* est égale à une demi-circonférence de grand cercle. Dans le premier cas, d'après la proposition n° 20 (voir note 30 [proposition n° 20]), *angle(IHA)* et *angle(C)* sont supplémentaires ; dans le deuxième cas, d'après la proposition n° 24 (voir la note 28 [proposition no 24]), *angle(IHA)* et *angle(C)* sont égaux. Par suite, *angle(G)* et *angle(C)* sont soit égaux, soit supplémentaires.

Remarquons que la proposition reste vraie même lorsque *angle(A)* et *angle(D)* sont supplémentaires. En particulier, si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) *angle(A)* et *angle(D)* sont supplémentaires,

[32] Pour que l'application de la proposition n° 35 soit légitime avec la configuration choisie par Ménélaüs et Ibn Hūd, il faut supposer que chacune des deux sommes *arc(AH)* + *arc(CA)* et *arc(AB)* + *arc(AI)* est plus petite qu'une demi-circonférence d'un grand cercle. Ce qui équivaut à supposer que chacune des deux sommes *arc(DG)* + *arc(CA)* et *arc(AB)* + *arc(DE)* est plus petite qu'une demi-circonférence d'un grand cercle.

b) la somme *angle(G)* + *angle(C)* est inférieure à deux angles droits,

c) $\frac{hom(AB)}{hom(BC)} = \frac{hom(DE)}{hom(EG)}$,

alors angle(G) = angle(C)[33].

Nous trouvons le même résultat chez Ménélaüs. Bien qu'Ibn Hūd utilise dans sa proposition le terme « *homologue* » au lieu du terme « *Sinus* » utilisé par Ménélaüs, la formulation[34] textuelle ainsi que la démarche démonstrative de la proposition n° 36 coïncident, presque littéralement, avec celles de la proposition correspondante de Ménélaüs

Afin d'effectuer une comparaison concrète, nous exposons, par la suite, la proposition mentionnée de Ménélaüs.

Proposition (*Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn 'Irāq, proposition III. 2. [Ibn 'Irāq 1998, p. 64-65], [Ibn 'Irāq, MSb, folios 34^v-35^r]) :

/[34^v] Si, dans deux figures trilatères, deux angles sont <respectivement> égaux et deux autres angles <respectifs> sont soit égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits, alors les rapports des Sinus des deux côtés qui sous-tendent les deux angles respectivement égaux, aux Sinus des autres côtés qui sous-tendent les deux autres angles - qui sont soit égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits -, sont deux rapports égaux ; et réciproquement (voir la Fig.4).

<*Exemple*>:

soient les deux figures trilatères *ABC* et *DEG* ; supposons que l'angle en A de la première figure soit égal à l'angle *D* de l'autre ; que leurs angles en *C* et *G* soient égaux ou bien de somme égale à deux

"الشَكْلُ الثاني،

/[**٣٤ظ**] إذا كانَتْ[١] زاوِيَتانِ مَن زَوايا شَكْلَيْنِ[٢] مِنَ الأشْكالِ ذَواتِ الأضْلاعِ الثَلاثَةِ مُتَساوِيَتَيْنِ، وَكانَتْ زاوِيَتانِ أُخْرَيانِ إمّا مُتَساوِيَتَيْنِ وإمّا مُساوِيَتَيْنِ إذا جُمِعَتا لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ، فَإنّ نِسْبَتَيْ[٣] جَيْبَي الضِلْعَيْنِ اللّذَيْنِ يُوَتِّرانِ الزاوِيَتَيْنِ الـمُتَساوِيَتَيْنِ <إلَى جَيْبَي الضِلْعَيْنِ الآخَرَيْنِ اللّذَيْنِ يُوَتِّرانِ الزاوِيَتَيْنِ الأُخْرَيَيْنِ الـمُتَساوِيَتَيْنِ> أو الـمُساوِيَتَيْنِ لِقائِمَتَيْنِ <إذا جُمِعَتا>، نِسْبَتانِ مُتَساوِيَتانِ[٤]، وَعَكْسُ ذَلِكَ أيْضاً. فَلْيَكُنْ شَكْلانِ ذَوا[٥] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، عَلَيْهما ا ب جـ د هـ ز، وَلْتَكُنِ الزاوِيَةُ الَّتي عِنْدَ ا من أحَدِهِما مُساوِيَةً لِلزاوِيَةِ الَّتي عِنْدَ د من الآخَرِ.

[33] Cette propriété va être utilisée implicitement, sous cette forme, dans le paragraphe 14 (proposition n° 39).

[34] Voir la proposition 36 dans la traduction.

angles droits. Je dis que le rapport du Sinus de *AB* au Sinus de *BC* est égal au rapport du Sinus de *DE* au Sinus de *EG*.

<*Démonstration* :>

prolongeons les deux arcs *CA* et *BA* jusqu'en *H* et *I* respectivement, faisons l'arc *AH* égal à l'arc *DG* et l'angle *AHI* égal à l'angle *EGD* et achevons la figure. Ainsi l'arc *AI* est égal à l'arc *DE* et l'arc *IH* est égal à l'arc *EG*. Puisque les deux angles BCA, AHI sont égaux ou bien de somme égale à deux angles droits, le Sinus de l'arc *CK* est égal au Sinus de l'arc *HK* ; et puisque la figure reste inchangée, le rapport du Sinus de l'arc *KC* au Sinus de l'arc *BC* est composé du rapport du Sinus de l'arc *KH* au Sinus de l'arc *HI* et du rapport du Sinus de l'arc *IA* au Sinus de l'arc *AB* ; mais le Sinus de l'arc *CK* est égal au Sinus de l'arc *KH*, de sorte que le rapport du Sinus de l'arc *HI* au Sinus de l'arc *BC* est égal au rapport du Sinus de l'arc *IA* au Sinus de l'arc *BA*. Si nous permutons, <les rapports> restent également proportionnels, mais l'arc *HI* est égal à l'arc *EG*, et l'arc *AI* est égal à l'arc *DE*, donc le rapport du Sinus de l'arc *CB* au Sinus de l'arc AB est égal au rapport du Sinus de l'arc *EG* au Sinus de l'arc *ED*.

<*Réciproquement :*>

Supposons de même que l'angle en A soit égal à l'angle en *D*, et que le rapport du Sinus de l'arc *CB* au Sinus de l'arc *AB* soit égal au rapport du Sinus de l'arc *EG* au Sinus de l'arc *ED*. Je dis que les deux angles en *C* et *G* sont, soit égaux, soit de somme égale à deux angles droits.

<*Démonstration* :>

Si nous faisons comme précédemment, le rapport du Sinus de

وَلْتَكُنِ الزاوِيَتانِ مِنْهُما اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ج ز إمّا مُتَساوِيَتَيْنِ وإمّا مُساوِيَتَيْنِ[٦] لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ <إذا جُمِعَتا>. فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ جَيْبِ ا؟ب إلَى جَيْبِ ب؟ج كَنِسْبَةِ جَيْبِ د؟ه إلَى جَيْبِ ه؟ز. لأنّا نُخْرِجُ قَوْسَيْ ج؟ا؟ح ب؟ا؟ط وَنَجْعَلُ قَوْسَ ا؟ح مُساوِيَةً لِقَوْسِ د؟ز، وَزاوِيَةَ ا؟ح؟ط لِزاوِيَةِ ه؟ز؟د؛ وَنُتَمِّمُ الصورَةَ، فَتَكونُ قَوْسُ ا؟ط مُساوِيَةً لِقَوْسِ د؟ه، وقَوْسُ ط؟ح لِقَوْسِ ه؟ز. ولأنّ زاوِيَتَيْ ب؟ج؟ا ا؟ح؟ط إمّا أنْ تَكونا مُتَساوِيَتَيْنِ، وإمّا مُساوِيَتَيْنِ[٧] لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ إذا جُمِعَتا، يَكونُ جَيْبُ قَوْسِ ج؟ك مُساوِياً لِجَيْبِ قَوْسِ ح؟ك. وَلأنّ الصورَةَ عَلَى ما هِيَ عَلَيْهِ، تَكونُ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ك؟ج إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ك؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ح؟ط ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ط؟ا إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب، وَلَكِنّ جَيْبَ قَوْسِ ج؟ك مُساوٍ لِجَيْبِ قَوْسِ ك؟ح <فَتَكونُ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ح؟ط إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ط؟ا إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ا> وإذا بَدّلْنا أيْضاً تَكونُ مُتَناسِبَةً. وَلَكِنّ قَوْسَ ح؟ط مُساوِيَةٌ[٨] لِقَوْسِ ه؟ز، وقَوْسُ ا؟ط مساويةٌ لِقَوْسِ د؟ه، فَنِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ج؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ه؟ز إلَى جَيْبِ قَوْسِ ه؟د. أيْضاً فَإنّا نَجْعَلُ الزاوِيَةَ <الَّتي عِنْدَ نُقْطَةِ ا مُساوِيَةً لِلزاوِيَةِ> الَّتي عِنْدَ نُقْطَةِ د، وَلْتَكُنْ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ج؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ه؟ز إلَى جَيْبِ قَوْسِ ه؟د. فَأقولُ إنّ الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ج ز إمّا أنْ تَكونا مُتَساوِيَتَيْنِ وإمّا أنْ تَكونا إذا جُمِعَتا مُعادِلَتَيْنِ لِقائِمَتَيْنِ. لأنّا إذا عَمِلْنا مِثْلَ

l'arc *CB* au Sinus de l'arc *AB* sera égal au rapport du Sinus de *HI* au Sinus de *IA* ; et de même, si nous permutons, <les rapports> restent proportionnels ; et si la figure reste inchangée, le Sinus de l'arc *KH* sera égal au Sinus de l'arc *KC* ; et par suite, les deux angles *IHA*, *ACB*, qui sont aux deux points *C* et *G*, seront /[35r] soit égaux soit de somme égale à deux angles droits. C'est ce que nous voulions montrer.

العَمَلِ المَذْكورِ كانَتْ نِسْبَةُ جَيْبِ ج؟ب إِلَى جَيْبِ ا؟ب كَنِسْبَةِ جَيْبِ ح؟ط إِلَى جَيْبِ ط؟ا. وأيْضاً إذا بَدّلْنا كانَتْ مُتَناسِبَةً. وإذا كانَتِ الصورَةُ عَلَى ما هِيَ عَلَيْهِ فإنّ جَيْبَ قَوْسِ ك؟ح يَكونُ مُساوِياً لِجَيْبِ قَوْسِ ك؟ج، وَتَكونُ لِذَلِكَ زاوِيَتا ط؟ح؟ا ا؟ج؟ب اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ج ز إمّا /[٣٥و] مُتَساوِيَتَيْنِ وإما مُساوِيَتَيْنِ إذا جُمِعَتا[٩] لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ؛ وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ."

١. كانت: كان؛ ٢. شكلين: شكل؛ ٣. نسبتي: نسبة؛ ٤. متساويتان: متساوين؛ ٥. ذوا: ذو؛ ٦. مساويتين: مساوين؛ ٧. مساويتين: مساوين؛ ٨. مساوية: كلمة مكرّرة؛ ٩. جمعتا: جمعا.

Ibn 'Irāq discute la démonstration de la proposition III. 2 de Ménélaüs. Il écrit ([Ibn 'Irāq 1998, p. 65], [Ibn 'Irāq, MSb, folio 35r]) :

"وَإذا تَأمّلَ مُتَأمِّلٌ وَقاسَ بَيْنَ عَمَلِنا في الشَكْلِ الـمُغْني وَما عَمِلَهُ مانالاوس[١] في الشَكْلِ القَطّاعِ وَكَثْرَةِ ما يُحْتاجُ إلَيْهِ مِنَ البَراهينِ، وَعَرَفَ أنّهُ إذا كانَتْ زاوِيَتا ا د في الـمُثَلّثَيْنِ مُتَساوِيَتَيْنِ وَنِسْبَةُ جَيْبِ ب؟ج إلَى جَيْبِ ب؟ا كَنِسْبَةِ جَيْبِ ه؟ز إلَى جَيْبِ ه؟د، عَلِمَ بِسُرْعَةٍ مِنْ غَيْرِ إطالَةِ كَلامٍ وَشُروعٍ في بُرْهانٍ، سِوَى التَقَدُّمِ في الشَكْلِ الـمُغْني الّذي يَقومُ مَقامَ الشَكْلِ القَطّاعِ، أنّ زاوِيَتَيْ ز ج إذ[٢] جَيْباهُما مُتَساوِيانِ، تَكونانِ مُتَساوِيَتينِ[٣] إمّا مُساوِيَتينِ[٤]، إذا جُمِعَتا[٥]، لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ."

١. مانالاوس: مالاناوس؛ ٢. إذ: إذا؛ ٣. متساويتين: متساويين؛ ٤. مساويتين: مساويتان؛ ٥. إذا جُمِعَتا: او معادلتان.

Si on observe de près et si l'on compare ce que nous avons fait dans *« La figure qui dispense »* et ce que Ménélaüs a fait dans *« La figure secteur »* qui exige plusieurs démonstrations, et si l'on sait que les deux angles *A* et *D* des deux triangles sont égaux et que le rapport du Sinus de l'arc *BC* au Sinus de l'arc *BA* est égal au rapport du Sinus de l'arc *EG* au Sinus de l'arc *ED*, il devient clair, rapidement, sans long discours et sans entamer aucune démonstration, à part l'utilisation de *'La figure qui dispense'* - qui remplace *'La figure secteur'* -, que les deux angles *G* et *C* sont soit égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits, puisque leurs deux Sinus sont égaux. »

Commentaire sur la note d'Ibn 'Irāq.

D'après le théorème du sinus, nous aurons (voir la Fig. 4) :

$$\frac{Sin(angl(G))}{Sin(arc(DE))} = \frac{Sin(angl(D))}{Sin(arc(GE))} \text{ et } \frac{Sin(angl(C))}{Sin(arc(AB))} = \frac{Sin(angl(A))}{Sin(arc(CB))}.$$

D'autre part, nous avons :

$$angle(A) = angle(D)$$

et

$$\frac{Sin(arc(GE))}{Sin(arc(DE))} = \frac{Sin(arc(CB))}{Sin(arc(AB))}.$$

Par conséquent[35],

$$Sin(angle(G)) = Sin(angle(C))\ ;$$

par suite, *angle(G)* et *angle(C)* sont soit égaux, soit supplémentaires.

§ 12 - Proposition n° 37 (règles des tangentes).

Soient *ABC* et *DEG* deux triangles sphériques sur la même sphère. Désignons par *H (*resp. *I*) le pôle de *cercle(AC)* (resp. *cercle(DG)*) qui est du même côté que *B* (resp. *E*) par rapport au *cercle(AC)* (resp. *cercle(DG)*). Si

$$angle(A) = angle(D) = drt \qquad et \qquad angle(C) = angle(G) \neq drt,$$

alors les deux relations suivantes sont satisfaites (voir la Fig. 5) :

$$1) \quad \frac{hom(AB)}{hom(AC)} = \frac{hom(ED)}{hom(DG)} \times \frac{hom(BH)}{hom(EI)}$$

$$2) \quad \frac{hom(BC)}{hom(CA)} = \frac{hom(EG)}{hom(DG)} \times \frac{hom(BH)}{hom(EI)}$$

[35] Nous trouvons l'énoncé et la traduction du texte du théorème d'Abū Nasr (*la figure qui dispense*), par exemple, dans [Debarnot 1985, p. 111]. Al-Bīrūnī a écrit : « Voie suivie par Abū Nasr, pour la « *figure qui dispense* », dans la lettre qu'il m'a adressée : les rapports, les uns aux autres, des Sinus des côtés d'un triangle formé d'arcs de grands cercles d'une sphère sont égaux aux rapports respectifs des Sinus des angles qui leurs sont opposés… ».
"طَرِيقُ أَبي نَصْرٍ في الشَكْلِ الـمُغْني مِنْ رِسالَتِهِ إلَيِّ : نِسْبَةُ جُيوبِ الأضْلاعِ في الـمُثَلّثِ الكائِنِ مِنْ قِسِيٍّ عِظامٍ عَلَى سَطْحِ الكُرَةِ، بَعْضُها إِلَى بَعْضٍ، عَلَى نِسْبَةِ جُيوبِ الزَوايا الّتي تُقابِلُها، بَعْضُها إِلَى بَعْضٍ، النَظيرُ إِلَى النَظيرِ..."

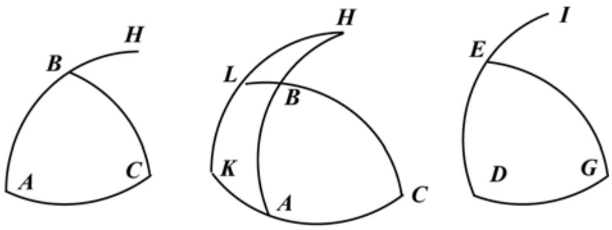


Fig. 5

Preuve.

Éliminons le cas trivial qui correspond à l'égalité *arc(AC) = arc(DG)* ; dans ce cas, d'après la proposition n° 28 (voir la note 27 [proposition n° 28]), les deux triangles *ABC* et *DEG* sont égaux et par conséquent, les deux relations 1) et 2) sont évidemment satisfaites.

Sans restreindre la généralité de la démonstration, nous pouvons supposer que *arc(DG)* est plus grand que *arc(AC)*. Soit *K* un point de *cercle(CA)* tel que *arc(CAK) = arc(DG)*.

Désignons par *L* le point d'intersection de *arc(BC)* et *arc(HK)*.

D'après la proposition n° 35 (relation 2), nous avons :

$$\frac{hom(HL)}{hom(LK)} = \frac{hom(HB)}{hom(BA)} \cdot \frac{hom(AC)}{hom(CK)},$$

d'où

$$(3)\quad \frac{hom(AB)}{hom(CA)} = \frac{hom(BH)}{hom(LH)} \cdot \frac{hom(LK)}{hom(KC)}.$$

Mais d'après la proposition n° 28 (voir la note 27 [proposition n° 28]), les deux triangles *LKC* et *EDG* sont égaux.

Par conséquent, *arc(KL) = arc(DE)* et par suite *arc(LH) = arc(EI)*.

En remplaçant *arc(KL)* et *arc(LH)* par leurs valeurs dans la relation (3), nous obtenons

$$\frac{hom(AB)}{hom(CA)} = \frac{hom(ED)}{hom(DG)} \cdot \frac{hom(BH)}{hom(EI)}.$$

D'après la proposition n° 36, nous avons :

$$\frac{hom(BC)}{hom(AB)} = \frac{hom(EG)}{hom(ED)}.$$

« Composons »[36] cette proportion avec la proportion 1), nous obtenons

$$\frac{hom(AB)}{hom(AC)} \cdot \frac{hom(BC)}{hom(AB)} = \frac{hom(ED)}{hom(DG)} \cdot \frac{hom(BH)}{hom(EI)} \cdot \frac{hom(EG)}{hom(ED)}.$$

D'où

$$\frac{hom(BC)}{hom(CA)} = \frac{hom(EG)}{hom(DG)} \cdot \frac{hom(BH)}{hom(EI)}.$$

Nous trouvons le même résultat chez Ménélaüs [Ibn 'Irāq 1998, proposition III. 3, p. 65-66]. Hormis le fait qu'Ibn Hūd utilise dans sa proposition le terme "homologue" au lieu du terme "*Sinus*" utilisé par Ménélaüs.

Nous remarquons, comme auparavant, une pseudo-coïncidence textuelle dans les propositions correspondantes des deux auteurs.

Exposons, ensuite, la proposition de Ménélaüs.

Proposition (Les Sphériques de Ménélaüs-Ibn 'Irāq, proposition III. 3. [Ibn 'Irāq 1998, p. 65-66], [Ibn 'Irāq, MSb, folios 35^r-35^v]) :

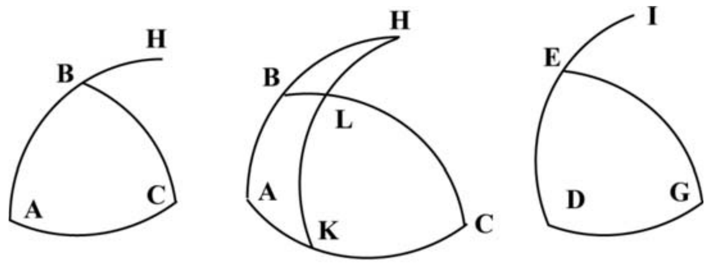


Fig. 5a

[36] Il s'agit d'une multiplication terme à terme des membres des proportions. (Voir la note 25 [la composition des rapports]). Pour cette opération, Ibn Hūd utilise le terme « ajoutons ».

[١١]الشَكْلُ الثالِثُ،

إذا كانَ شَكْلانِ ذَوا[١] ثَلاثَةِ[٢] أضْلاعٍ وَكانَتْ زاوِيَتانِ مِن زَواياهُما الّتي عَلَى القاعِدَةِ قائِمَتَيْنِ، وكانَتِ الزاوِيَتانِ الباقِيَتانِ مِن الزَوايا الّتي عَلَى القاعِدَتَيْنِ مُتَساوِيَتَيْنِ غَيْرَ قائِمَتَيْنِ فإنّ نِسْبَةَ جَيْبَيِ الضِلْعَيْنِ المُحيطَيْنِ بِالزاوِيَةِ القائِمَةِ مِن أحَدِ الشَكْلَيْنِ، أحَدُهُما إلَى الآخَرِ، مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبَيِ الضِلْعَيْنِ المُحيطَيْنِ بِالزاوِيَةِ القائِمَةِ مِنَ الشَكْلِ الآخَرِ، إذا أُخِذَتْ[٣] عَلَى مِثْلِ ما أُخِذَتْ[٤] عَلَيْهِ النِسْبَةُ الأُولَى، ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ القَوْسِ الّتي تَكونُ فيما بَيْنَ نُقْطَةِ رأسِ الشَكْلِ الأوّلِ وبَيْنَ قُطْبِ قاعِدَتِهِ إلَى جَيْبِ القَوْسِ الّتي تَكونُ فيما بَيْنَ نُقْطَةِ رأسِ الشَكْلِ الآخَرِ وبَيْنَ قُطْبِ قاعِدَتِهِ. فَلْيَكُنْ شَكْلانِ ذَوا ثَلاثَةِ أضْلاعٍ عَلَيْهِما ا ب جـ د هـ ز وَلْتَكُنِ الزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ا د مِنْهُما قائِمَتَيْنِ والزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ جـ ز مُتَساوِيَتَيْنِ[٥] غَيْرَ قائِمَتَيْنِ وَلْيَكُنْ قُطْبا قَوْسَيْ ا؟جـ د؟ز نُقْطَتَيْ ح ط، فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟جـ مؤلّفةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ هـ؟د[٦] إلَى جَيْبِ قَوْسِ د؟ز ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ هـ؟ط، لأنّا نَجْعَلُ قَوْسَ جـ؟ك[٧] مُساوِيَةً لِقَوْسِ د؟ز وَنُخْرِجُ قَوْسَي ح؟ك <ب؟جـ فتَلْتَقِيان عَلَى نقطة ل>، فَيَكونُ قَوْسُ ك؟ل مُساوِيَةً لِقَوْسِ د؟هـ وقَوْسُ ل؟ح لِقَوْسِ هـ؟ط، وَلَكِنْ مِنْ أجْلِ أنّ الصورَةَ عَلَى ما هِيَ عَلَيْهِ يَكونُ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ح مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ا؟جـ إلَى جَيْبِ قَوْسِ جـ؟ك ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ك؟ل إلَى جَيْبِ قَوْسِ ل؟ح /[٣٥ظ] وَيَكونُ <نِسْبَةُ> جَيْبِ قَوْسِ <ب؟ا إلَى جَيْبِ قَوْسِ جـ؟ا مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ> ب؟ح إلَى <جَيْبِ> قَوْسِ ل؟ح ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ل؟ك إلَى

Si deux figures trilatères sont telles que parmi leurs angles à la base, deux sont droits ; si les deux angles restants aux deux bases sont égaux et non droits, alors le rapport des deux Sinus des deux côtés entourant l'angle droit de l'une des deux figures, l'un à l'autre, est composé du rapport correspondant des deux Sinus des deux côtés entourant l'angle droit de l'autre figure, l'un à l'autre, et du rapport du Sinus de l'arc qui est entre le point du sommet de la première figure et le pôle de sa base, au Sinus de l'arc, qui est entre le point du sommet de l'autre figure et le pôle de sa base (voir la Fig. 5a).

<*Exemple* :>

Soient deux figures trilatères *ABC*, *DEG*. Que les deux angles qui sont aux deux points A et *D* soient droits, que les deux angles qui sont aux deux points *C* et *G* soient égaux et non droits et que *H* et *I* soient les deux pôles des deux arcs *AC* et *DG*.

Je dis alors que le rapport du Sinus de l'arc AB au Sinus de l'arc *AC* est composé du rapport du Sinus de l'arc *ED* au Sinus de l'arc *DG* et du rapport du Sinus de l'arc *BH* au Sinus de l'arc *EI*.

<*Démonstration* :>

faisons l'arc *CK* égal à l'arc *DG* et traçons l'arc *HK*, <qui rencontre *BC* en *L*>. L'arc *KL* est égal à l'arc DE et l'arc *LH* est égal à l'arc *EI*, mais puisque la figure reste inchangée, le rapport du Sinus de l'arc *AB* au Sinus de l'arc *BH* est composé du rapport du Sinus de l'arc *AC* au Sinus de l'arc *CK* et du rapport du Sinus de l'arc *KL* au Sinus de l'arc *LH*/[35v] ; donc le rapport du Sinus de l'arc *BA* au Sinus de l'arc *CA* est composé du rapport du Sinus de l'arc *BH* au Sinus de l'arc *LH* et du rapport du Sinus de l'arc *LK* au Sinus de l'arc *KC* ;

mais l'arc *KC* est égal à l'arc *DG*, l'arc *KL* est égal à l'arc *DE* et l'arc *LH* est égal à *EI*, d'où le rapport du Sinus de l'arc *AB* au Sinus de l'arc AC est composé du rapport du Sinus de l'arc *DE* au Sinus de l'arc *DG* et du rapport du Sinus de l'arc *BH* au Sinus de l'arc *EI*. Il est clair aussi que le rapport du Sinus de l'arc *BC* au Sinus de l'arc *CA* est composé du rapport du Sinus de l'arc *EG* au Sinus de l'arc *DG*, et du rapport du Sinus de l'arc *BH* au Sinus de l'arc *EI*. C'est ce que nous voulions démontrer.

جَيْبِ قَوْسِ ك?ج، وَلَكِنّ قَوْسَ ك?ج مُساوِيَةٌ لِقَوْسِ د?ز وقَوْسَ ك?ل مُساوِيَةٌ لِقَوْسِ د?ه وقَوْسَ ل?ح لِقَوْسِ ه?ط، فنِسْبَةُ[٨] جَيْبِ قَوْسِ ا?ب إِلَى جَيْبِ قَوْسِ ا?ج مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ د?ه إِلَى جَيْبِ قَوْسِ د?ز ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب?ح إِلَى جَيْبِ قَوْسِ ه?ط. ومِنَ البَيِّنِ أيْضاً أنّ نِسْبَةَ جَيْبِ قَوْسِ ب?ج إِلَى جَيْبِ قَوْسِ ج?ا مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ه?ز إِلَى جَيْبِ قَوْسِ د?ز ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب?ح[٩] إِلَى جَيْبِ قَوْسِ ه?ط. وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ."

١. ذوا: ذو؛ ٢. ثلاثة: ثلثة؛ ٣.أخذت: احدث؛ ٤. أخذت: احدث؛ ٥. متساويتين: متساويين؛ ٦. ه?د: ه?ز؛ ٧. ج?ك: ح?ك؛ ٨. فنِسْبَةُ: ونسبة؛ ٩. ب?ح: ل?ح.

Ibn 'Irāq commente la démonstration de la proposition III. 3 de Ménélaüs. Il écrit ([Ibn 'Irāq 1998, p. 66-67], [Ibn 'Irāq, MSb, folio 35^{v}]) (voir la Fig. 5a) :

Même si c'était comme l'auteur mentionne, lorsqu'il démontre - en se basant sur la *figure 'secteur'* - que le rapport du Sinus de l'arc *AB* au Sinus de l'arc *BH* est composé du rapport du Sinus de l'arc *KL* au Sinus de l'arc *LH* et du rapport du Sinus de l'arc *AC* au Sinus de l'arc *KC*, puis il dit que le rapport du Sinus de l'arc *AB* au Sinus de l'arc *AC* - le cinquième - est composé du rapport du Sinus de l'arc *BH* - le second - au Sinus de l'arc *LH* - le quatrième - et du rapport du Sinus de l'arc *KL* - le troisième - au Sinus de l'arc *KC* - le sixième -, il a besoin d'une démonstration supplémentaire ; mais puisque le rapport du Sinus de l'arc *AB* au

"هَذا، وإنْ كانَ كَما يَذْكُرُهُ صاحِبُ الكِتابِ فإنّهُ حينَ تَبَيَّنَ بِما قَدَّمَ مِنَ الشَكْلِ القَطّاعِ أنّ نِسْبَةَ جَيْبِ ا?ب إِلَى جَيْبِ ب?ح مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ ك?ل[١] إِلَى جَيْبِ ل?ح ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ ا?ج إِلَى جَيْبِ ك?ج، ثُمّ يَقولُ إنّ نِسْبَةَ جَيْبِ ا?ب إِلَى جَيْبِ ا?ج، الخامِسِ، مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ ب?ح، الثاني، إِلَى <جَيْبِ> ل?ح، الرابِعِ، ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ ك?ل[٢]، الثالِثِ، إِلَى جَيْبِ ك?ج، السادِسِ، فإنّه يَحْتاجُ إِلَى زِيادَةِ بُرْهانٍ، وَلَكِن لأنّ نِسْبَةَ جَيْبِ ا?ب إِلَى جَيْبِ ا?ج كَنِسْبَةِ جَيْبِ زاوِيَة ج إِلَى جَيْبِ زاوِيَةِ ب،

Sinus de l'arc *AC* est égal au rapport du Sinus de l'angle C au Sinus de l'angle *B*, le rapport du Sinus de l'arc *ED* au Sinus de l'arc *DG* est égal au rapport du Sinus de l'angle *G* au Sinus de l'angle *E* et les deux angles *G*, *C* sont égaux ; alors le rapport du Sinus de l'arc *AB* au Sinus de l'arc *AC* est composé du rapport du Sinus de l'arc *ED* au Sinus de l'arc *DG* et du rapport du Sinus de l'angle E au Sinus de l'angle *B* ; mais le rapport du Sinus de l'arc *BH* au Sinus de l'arc *LH* est égal au rapport du Sinus de l'angle *L* – qui est égal à l'angle *E* – au Sinus de l'angle extérieur *B* dont la somme avec l'angle intérieur *B* est égale à deux angles droits. Par conséquent, le rapport du Sinus de l'arc *AB* au Sinus de l'arc *AC* est composé du rapport de l'arc *BH* au Sinus de l'arc *LH* – qui est égal au rapport du Sinus de l'angle *E* au Sinus de l'angle *B* – et du rapport du Sinus de l'arc *KL* au Sinus de l'arc *KC*. C'est ce qu'il fallait montrer. »

ونِسْبَةُ جَيْبِ ه؟د إلَى جَيْبِ د؟ز كَنِسْبَةِ جَيْبِ زاوِيَةِ ز إلَى جَيْبِ زاوِيَةِ ه وزاوِيَتا ز ج مُتَساوِيتانِ فَنِسْبَةُ جَيْبِ ا؟ب إلَى جَيْبِ ا؟ج مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ ه؟د إلَى جَيْبِ د؟ز ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ زاوِيَةِ ه إلَى جَيْبِ زاوِيَةِ ب[٣]، لَكِنّ نِسْبَةَ جَيْبِ ب؟ح إلَى جَيْبِ ل؟ح كَنِسْبَةِ جَيْبِ زاوِيَةِ ل الـمُساوِيَةِ لِزاوِيَةِ ه إلَى جَيْبِ زاوِيَةِ ب الخارِجَةِ الّتي هِيَ مع الداخِلَةِ مَجْموعتَيْنِ مُعادِلتانِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ؛ فَنِسْبَةُ جَيْبِ ا؟ب إلَى جَيْبِ ا؟ج مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ ب؟ح[٤] إلَى جَيْبِ ل؟ح الـمُساوِيَةِ لِنِسْبَةِ جَيْبِ زاوِيَةِ ه إلَى جَيْبِ زاوِيَةِ ب <ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ ك؟ل إلَى جَيْبِ ك؟ج>. وذَلِكَ ممّا يَنْبَغي أن يُبَيّنَ."

١. ك؟ل: ك؟د؛ ٢. ك؟ل: ك؟د؛ ٣. ب: د؛ ٤. ب؟ح: ب؟لح.

Commentaire sur la note d'Ibn 'Irāq.

Ibn 'Irāq indique que l'implication[37]

$$\frac{Sin(arc(AB))}{Sin(arc(BH))} = \frac{Sin(arc(KL))}{Sin(arc(LH))} \cdot \frac{Sin(arc(AC))}{Sin(arc(KC))}$$

$$\Rightarrow \frac{Sin(arc(AB))}{Sin(arc(AC))} = \frac{Sin(arc(BH))}{Sin(arc(LH))} \cdot \frac{Sin(arc(KL))}{Sin(arc(KC))},$$

utilisée par Ménélaüs n'est pas bien fondée. Il propose sa propre démonstration basée sur « *la figure qui dispense* »[38].

[37] Contrairement à Ménélaüs, Ibn Hūd explique ce passage logique. Il écrit que cette implication a lieu, d'après la quatrième méthode parmi les dix-huit méthodes de composition des rapports (voir la traduction, proposition n° 37).

Nous avons

$$\frac{Sin(arc(AB))}{Sin(arc(AC))} = \frac{Sin(angl(C))}{Sin(angl(B))},\ \frac{Sin(arc(ED))}{Sin(arc(DG))} = \frac{Sin(angl(G))}{Sin(angl(E))}$$

et *angle(G)* = *angle(C)* ; par suite, nous obtenons (voir la note 25 [la composition des rapports]) :

$$\begin{aligned}\frac{Sin(arc(AB))}{Sin(arc(AC))} &= \frac{Sin(angl(C))}{Sin(angl(B))}\cdot\frac{Sin(angl(E))}{Sin(angl(E))}\\ &= \frac{Sin(angl(G))}{Sin(angl(E))}\cdot\frac{Sin(angl(E))}{Sin(angl(B))}\\ &= \frac{Sin(arc(ED))}{Sin(arc(DG))}\cdot\frac{Sin(angl(E))}{Sin(angl(B))},\end{aligned}$$

mais

$$\frac{Sin(arc(BH))}{Sin(arc(LH))} = \frac{Sin(angl(L))}{Sin(angl(ext(B)))}$$

et puisque

$$angle(L) = angle(E)$$

et que

$$angle(B) + angle(ext(B)) = 2\ drt,$$

nous trouvons

$$\frac{Sin(arc(BH))}{Sin(arc(LH))} = \frac{Sin(angl(E))}{Sin(angl(B))}.$$

En conséquence

$$\frac{Sin(arc(AB))}{Sin(arc(AC))} = \frac{Sin(arc(ED))}{Sin(arc(DG))}\cdot\frac{Sin(arc(BH))}{Sin(arc(LH))}.$$

C.Q.F.D.

[38] Dans la démonstration d'Ibn ʿIrāq, puisqu'il a choisi le cas où arc*(DG)* > arc*(AC)*, il faut considérer la Fig. 5a. Le choix indiqué n'influe pas sur le résultat final de la proposition n° 37, puisque les sinus de deux angles supplémentaires sont égaux.

§ 13 - Proposition n° 38.

Soient *ABC* et *DEG* deux triangles sphériques sur la même sphère ; et soit *K* (resp. *L*) le pôle de *cercle(AC)* (resp. *cercle(DG)*) qui est du même côté que *B* (resp. *E*), par rapport au *cercle(AC)* (resp. *cercle(DG)*). Désignons par *H* le point d'intersection de *arc(KB)* et de *arc(AC)* et par I celui de *arc(LE)* et de *arc(DG)*.

Si *angle(A) = angle(D) ≠ drt* et *angle(C) = angle(G) ≠ drt*, alors

$$\frac{hom(AH)}{hom(HC)} = \frac{hom(DI)}{hom(IG)}.$$ (Voir la Fig. 6)

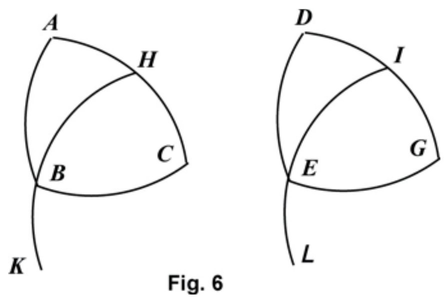


Fig. 6

Preuve.

Considérons les deux triangles *BHC* et *EIG*. Nous avons

angle(H) = angle(I) = drt et angle(C) = angle(G) ≠ drt.

D'après la proposition n° 37 (relation 1), nous déduisons

$$\frac{hom(IE)}{hom(IG)} = \frac{hom(BH)}{hom(CH)} \cdot \frac{hom(EL)}{hom(BK)}$$

D'où

$$(1)\quad \frac{hom(CH)}{hom(GI)} = \frac{hom(BH)}{hom(EI)} \cdot \frac{hom(EL)}{hom(BK)}.$$

Procédons, par analogie, pour les deux triangles *BHA* et *EID*, nous trouvons

$$(2)\quad \frac{hom(AH)}{hom(DI)} = \frac{hom(BH)}{hom(EI)} \cdot \frac{hom(EL)}{hom(BK)}.$$

En comparant les deux dernières relations, nous obtenons

$$\frac{hom(AH)}{hom(DI)} = \frac{hom(CH)}{hom(GI)}.$$

C.Q.F.D.

Nous trouvons, comme auparavant, le même résultat chez Ménélaüs [Ibn 'Irāq 1998, proposition III. 4, p. 67-68]. Hormis le fait qu'Ibn Hūd utilise dans sa proposition le terme « *homologue* » au lieu du terme « *Sinus* » utilisé par Ménélaüs, nous remarquons une quasi-coïncidence textuelle dans les propositions correspondantes des deux auteurs. Pour démontrer les deux relations (1) et (2) de la proposition n° 38, Ménélaüs et Ibn Hūd doivent considérer, dans leurs démonstrations, deux couples de triangles rectangles intermédiaires : (*AHB*, *DIE*) et (*BHC*, *EIG*). En comparant les textes des deux auteurs, nous trouvons qu'Ibn Hūd démontre seulement la relation (1) qui peut être démontrée, en considérant le premier couple de triangles. Le texte d'Ibn Hūd contient une longue phrase répétée. Il semble qu'il y ait une erreur de copiste. Malgré la différence indiquée, la démonstration conserve la même forme chez les deux auteurs.

Exposons, par la suite, la proposition mentionnée de Ménélaüs.

Proposition (*Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn 'Irāq, proposition III. 4. [Ibn 'Irāq 1998, p. 67-68], [Ibn 'Irāq, MSb, folios 35^v-36^r])

Soient deux figures trilatères telles que les angles à la base sont non droits et égaux, chacun à son angle homologue. Si on mène des sommets des deux figures leurs hauteurs, alors les Sinus des arcs découpés sur la base sont proportionnels. (Voir la Fig. 6).

<*Exemple* :>

soient deux figures trilatères ABC et DEG. Que l'angle en A soit égal à l'angle en D, que l'angle/[36^r] en C soit égal à l'angle en *G* et qu'aucun de ces angles ne soit droit. Menons des deux points *B* et *E* deux perpendiculaires aux bases *AC* et *DG*, soient *BH* et *EI*. Je dis que le rapport du Sinus de l'arc *AH* au Sinus de l'arc *HC* est égal au rapport du Sinus de l'arc *DI* au Sinus de l'arc IG.

<*Démonstration* :>

"الشَكْلُ الرابِعُ،

إذا كانَ شَكْلانِ ذَوا[١] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ وكانَت زَواياهما الّتي عَلَى القاعِدَةِ مُتَساوِيَةً، كلُّ زاوِيَةٍ وَنَظيرَتها، وَلَمْ يَكُنْ زاوِيَةٌ مِنْهُما بقائِمَةٍ وَأُخْرِجَ عَمودا الشَكْلَيْنِ[٢] من نُقْطَتَيْ رَأسَيْهِما فَإنّ جُيوبَ القِسِيِّ الّتي تَنْفَصِلُ مِنَ القاعِدَةِ مُتَناسِبَةٌ. فَلْيَكُنْ شَكْلانِ ذَوا[٣] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، عَلَيْهِما ا ب جـ د هـ ز وَلْيَكُنِ الزاوِيَةُ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ ا مُساوِيَةً لِلزاوِيَةِ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ د والّتي عِنْدَ[٤] نُقْطَةِ /[٣٦و] جـ لِلزاوِيَةِ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ ز وَلا يَكونُ واحِدَةٌ مِنْ هَذِهِ الزَوايا قائِمَةً وَنُخْرِجُ مِنْ نُقْطَتَيْ ب هـ عَمودَيْنِ عَلَى قاعِدَتَيْ ا؟جـ د؟ز وَهُما ب؟ح هـ؟ط. فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ح؟جـ[٥] كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ د؟ط إلَى

posons les pôles des deux arcs *AC* et *DG* les deux points *K* et *L*. Puisque les deux angles aux points *H* et *I* sont droits, les deux angles aux deux points *D* et *A* sont égaux et que les deux points K et L sont les pôles des deux arcs *AC* et *DG*, donc le rapport du Sinus de l'arc *AH* au Sinus de l'arc *DI* est composé du rapport du Sinus de l'arc *BH* au Sinus de l'arc *EI* et du rapport du Sinus de l'arc *EL* au Sinus de l'arc *BK*. De même, les deux angles en *H* et *I* des deux bases sont droits et les deux angles en *C* et *G* sont égaux et non droits, donc le rapport du Sinus de l'arc *CH* au Sinus de l'arc *GI* est composé du rapport du Sinus de l'arc *BH* au Sinus de l'arc *EI* et du rapport du Sinus de l'arc *EL* au Sinus de l'arc *BK*. Par conséquent, le rapport du Sinus de l'arc *AH* au Sinus de l'arc *DI* est égal au rapport du Sinus de l'arc *CH* au Sinus de l'arc *GI*. Si l'on permute, ils seront également proportionnels. C'est ce que nous voulions démontrer.

جَيْبِ قَوْسِ ط؟ز. لأنّا نَجْعَلُ قُطْبَيْ قَوْسَيْ ا؟ج د؟ز نُقْطَتَيْ ك ل. فَلأنّ الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ح ط قائِمَتانِ وأنّ الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ د ا مُتَساوِيَتانِ وَأنّ نُقْطَتَيْ ك ل هُما قُطْبا[٦] قَوْسَيْ ا؟ج د؟ز يَكونُ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ د؟ط مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ه؟ط ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ه؟ل إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ك وأيْضاً فَإنّ الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ القاعِدَتَيْنِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ح <ط> قائِمَتانِ، والزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ج ز مُتَساوِيَتانِ وَلَيْسَتا بقائِمَتَيْنِ، فَيَكونُ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ج؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ز؟ط مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ه؟ط ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ه؟ل إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ك وَيَكونُ لِذَلِكَ نِسْبَةُ[٧] جَيْبِ قَوْسِ ا؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ د؟ط كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ج؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ز؟ط وَإذا بَدّلْنا <أيْضاً> تكونُ مُتَناسِبَةً. وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ."

١. نَوا: نو؛ ٢. الشكلين: للشكلين؛ ٣. نَوا: نو ؛ ٤. نُقْطَةِ د والّتي عِنْدَ: أضيفت على الهامش الأيمن؛ ٥. ح؟ج: ك؟ج؛ ٦. قُطْبا: قُطْبي ٧. نِسْبَةُ: تشبه.

§ 14 - Proposition n° 39.

1. Si *ABC* est un triangle sphérique et si *D* est un point de *arc(AC)*, alors *arc(BD)* est bissecteur de *angle(ABC)* si et seulement si

$$(1)\ \frac{hom(BA)}{hom(AD)} = \frac{hom(BC)}{hom(CD)}.$$

2. Si *DBC* est un triangle sphérique et si *A* est un point sur le prolongement de *arc(CD)*, alors *arc(BA)* est bissecteur de l'angle adjacent supplémentaire de *angle(CBD)* si et seulement si

$$(2)\ \frac{hom(DB)}{hom(BC)} = \frac{hom(DA)}{hom(AC)}.$$

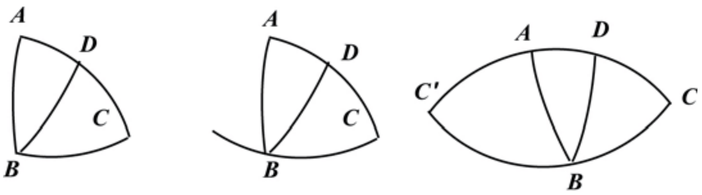


Fig. 7 Fig. 7a Fig. 7b

Preuve.

1. Supposons que *angle(ABD) = angle(DBC)*, (voir la Fig. 7).

Nous trouvons, d'après la relation

$$angle(BDA) + angle(BDC) = 2\ drt,$$

que les deux triangles *BAD* et *BCD* vérifient l'hypothèse de la proposition n°36 (1). Par conséquent

$$\frac{hom(BA)}{hom(AD)} = \frac{hom(BC)}{hom(CD)}.$$

Réciproquement (voir la Fig. 7), si la relation (1) est satisfaite, les deux relations *angle(BDA) + angle(BDC) =* 2 *drt* et *angle(CBA) <* 2 *drt*, entraînent l'égalité

$$angle(CBD) = angle(DBA$$ [39].

2. Considérons maintenant les deux triangles *ABD* et *ABC* (voir la Fig. 7a). L'angle *A* est commun aux triangles *ABD* et *ABC* et la somme *angle(DBA)* + *angle(CBA)* est égale à deux angles droits, donc ces deux triangles vérifient l'hypothèse de la proposition n° 36 et par suite

$$\frac{hom(DB)}{hom(BC)} = \frac{hom(DA)}{hom(AC)}.$$

Réciproquement, supposons que la relation (2) soit satisfaite et désignons par *C'* le point diamétralement opposé au point *C* (voir la Fig. 7b). Nous avons :

hom(BC) = hom(BC') et *hom(AC) = hom(AC')*.

Ce qui entraîne la relation

---

[39] Voir le commentaire de la proposition n° 36.

$$\frac{hom(DB)}{hom(BC')} = \frac{hom(DA)}{hom(AC')}.$$

En appliquant le résultat de la proposition n° 36 au couple des triangles *ABD*, *ABC'*, nous trouvons

$$angle(DBA) = angle(ABC').$$

C.Q.F.D.

Nous trouvons, chez Ménélaüs, les mêmes résultats formulés dans deux propositions exposées par la suite :

Proposition (*Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn ‘Irāq, proposition III. 6. [Ibn ‘Irāq 1998, p. 72-73], [Ibn ‘Irāq, MSb, folios 38^v-39^r])

Si l'angle d'une figure trilatère est divisé en deux moitiés, les rapports des Sinus de deux côtés aux Sinus des arcs découpés sur la base sont égaux. La réciproque et la permutation sont également valables.

<*Exemple* :>

soit la figure trilatère ABC. Que l'arc BD partage l'angle B en deux moitiés.

Je dis que le rapport du Sinus de l'arc AB au Sinus de l'arc AD est égal au rapport du Sinus de l'arc BC au Sinus de l'arc DC, (voir la Fig. 7).

<*Démonstration* :>

Puisque ABD et CBD sont des figures trilatères ayant les angles ABD et CBD égaux et les angles en D sont de somme égale à deux angles droits, donc le rapport du Sinus de l'arc BA au Sinus de l'arc AD est égal au rapport du Sinus de

"الشَكْلُ السادِسُ،

إذا قُسِمَتْ زاوِيَةُ شَكْلٍ ذي ثَلاثَةِ أضْلاعٍ بِنِصْفَيْنِ فإنّ نِسْبَتَيْ جَيْبَيِ الضِلْعَيْنِ إلَى جَيْبَيْ قِسْمَيِ القاعِدَةِ نِسْبَتانِ مُتَساوِيَتانِ وعَكْسُ ذَلِكَ أيْضاً وَعَلَى الإبْدالِ أيْضاً، فَلْيَكُنْ شَكْلٌ ذو ثَلاثَةِ أضْلاعٍ عَلَيْهِ ا ب ج، ولتَقْسِمْ قَوْسُ ب؟د الزاوِيَةَ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ ب بِنِصْفَيْنِ، فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟د كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج إلَى جَيْبِ قَوْسِ د؟ج، لأنّ شَكْلَيْ ا؟ب؟د ج؟ب؟د ذَوا[١] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ وَزاوِيَتا ا؟ب؟د ج؟ب؟د مِنْهُما مُتَساوِيَتانِ والزاوِيَتانِ مِنْهُما اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَةِ د إذا جُمِعَتا[٢] مُساوِيَتانِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ فَيَكونُ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ا إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟د كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج إلَى جَيْبِ قَوْسِ ج؟د. وإذا بَدَّلْنا أيْضاً تَكونُ مُتَناسِبَةً وَلِيَكُنْ أيْضاً هَهُنا نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ا؟د إلَى جَيْبِ قَوْسِ د؟ج، فَأقولُ إنّ قَوْسَ ب؟د قَدْ قَسَمَتْ زاوِيَةَ ب[٣] بِنِصْفَيْنِ، لأنّ

l'arc BC au Sinus de l'arc CD. Si l'on permute, ils restent également proportionnels. Que maintenant le rapport du Sinus de l'arc AB au Sinus de l'arc BC soit égal au rapport du Sinus de l'arc AD au Sinus de l'arc DC.

Je dis alors que l'arc BD partage l'angle B en deux moitiés, (voir : Fig. 7a et Fig. 7b).

<*Démonstration* :>

Puisque les deux angles en D sont aussi d'une somme égale à deux angles droits, le rapport du Sinus de l'arc AB au Sinus de l'arc AD est égal au rapport du Sinus de l'arc BC au Sinus de l'arc CD et que les angles /[39^{r}] ABD et DBC ne sont pas de somme égale à deux angles droits, l'angle ABD est égal donc à l'angle DBC. »

الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ نُقْطَةِ د هُما أيْضاً مُعادِلتانِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ ونِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟د كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج[٤] إلَى جَيْبِ قَوْسِ ج؟د وَلَيْسَ زاوِيَةُ /[**٣٩و**] ا؟ب؟د وَزاوِيَةُ د؟ب؟ج إذا جُمِعَتا[٥] مُساوِيَتَيْنِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ فَزاوِيَةُ ا؟ب؟د مُساوِيَةٌ لِزاوِيَةِ د؟ب؟ج."

١. ذَوا: ذو؛ ٢. جُمِعَتا: جمعنا؛ ٣. ب: ب؟د؛ ٤. ب؟ج: م؟ج؛ ٥. جُمِعَتا: حمعنا.

Ibn ʻIrāq commente la démonstration de Ménélaüs, il écrit :

Ménélaüs a construit ceci, en se basant sur ce qu'il a montré dans la proposition 2 (livre III). L'application de la « *figure qui dispense* » nous dispense de cette construction qui devient comme une répétition. ([Ibn ʻIrāq 1998, p. 73], [Ibn ʻIrāq, MSb, folios 39^{r}])

"قَدْ بَنَى هَذا مانالاوس عَلَى ما قَدَّمَهُ في الشَكْلِ الثاني، وبالشَكْل الـمُغْني يُسْتَغْنَى عَنْ هَذا فَإنّهُ يَكونُ كَالـمُعادِ."

Proposition (*Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn ʻIrāq, proposition III. 7. [Ibn ʻIrāq 1998, p. 73-74], [Ibn ʻIrāq, MSb, folio 39^{r}]) :

Supposons, de la même manière, que l'angle qui succède à l'angle *ABC'*[40] soit divisé en deux moitiés par l'arc BD (voir la Fig. 7b). Je dis que le rapport du Sinus de l'arc AB au

"الشَكْلُ السابِعُ،

وأيْضاً فَإنّا نَجْعَلُ الزاوِيَةَ الّتي <تَلي> زاوِيَةَ ا؟ب؟ج مَقْسومَةً بِنِصْفَيْنِ بقَوْسِ ب؟د. فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ

[40] C'est-à-dire l'angle adjacent supplémentaire à l'angle ABC.

Sinus de l'arc *BC'* est égal au rapport du Sinus de l'arc *AD* au Sinus de l'arc *DC'* et réciproquement.

<*Démonstration* :>

Puisque les deux figures *ABD* et *C'BD* sont trilatères ayant l'angle D commun et la somme des angles *ABD* et *C'BD* égale à deux angles droits, le rapport du Sinus de l'arc *AB* au Sinus de l'arc *AD* est égal donc au rapport du Sinus de l'arc *BC'* au Sinus de l'arc *C'D*. La permutation est valable aussi et la réciproque est évidente.

جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ا؟د إلَى جَيْبِ قَوْسِ د؟ج وعَكْسُ ذَلِكَ <أيْضاً>، لأنّ شَكْلَيْ ا؟ب؟د ج؟ب؟د ذوا[١] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ والزاوِيَةُ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ د واحِدَةٌ مُشْتَرَكَةٌ لَهُما وَزاوِيَتا ا؟ب؟د ج؟ب؟د [و]إذا جُمِعَتا مُساوِيَتانِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ فَيَكونُ لِذَلِكَ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟د كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج إلَى جَيْبِ قَوْس، ج؟د[٢]، وَإبدالُ ذَلِكَ أيْضاً وَأمّا عَكْسُ ذَلِكَ فَهُوَ بَيِّنٌ."

١. ذوا: ذو؛ ٢. ج؟د: ا؟د.

II. Conclusion

Bien que l'on trouve, dans *Les Sphériques* de l'*Istikmāl*, des énoncés plus généraux que ceux de Théodose[41], le niveau des contenus mathématiques et démonstratifs de ces propositions d'Ibn Hūd ne dépasse pas, dans la plupart des cas, celui des *Sphériques* de Théodose et de Ménélaüs. En effet, Ibn Hūd rassemble des propositions des *Sphériques* de Théodose et de Ménélaüs ; mais le(s) auteur(s) de l'*Istikmāl* n'utilise(nt) presque nulle part la technique avancée du triangle sphérique pour réduire les démonstrations. Il faut noter ici que Ménélaüs a lui-même procédé à la reformulation de quelques énoncés de Théodose. Mais, il faut également remarquer que l'*Istikmāl* contient des démonstrations dignes d'attention. Par exemple, dans le deuxième chapitre, Ibn Hūd énonce et démontre un théorème remarquable en géométrie sphérique. C'est le théorème déjà mentionné qui généralise la proposition III. 11 des *Sphériques* de Théodose et intègre les propositions III. 23-25 des *Sphériques* de Menelaüs [théorème d'Ibn Hūd]. C'est pour établir ce théorème – contrairement à Ibn 'Irāq qui expose une démonstration euclidienne – que le(s) auteur(s) de l'*Istikmāl* procède(nt) par une méthode de géométrie « *intrinsèque* ». Ibn Hūd a-t-il lui-même fait cette découverte, ou l'a-t-il empruntée pour l'intégrer à un livre à vocation synthétique et encyclopédique comme l'*Istikmāl ?* Nous l'ignorons mais n'avons trouvé pour l'heure aucun prédécesseur d'Ibn Hūd qui ait entrepris une telle recherche et démontré ce théorème de géométrie sphérique de cette manière [Rashed et Al-Houjairi 2010]. La démonstration de l'égalité des angles à la base d'un triangle sphérique isocèle[42] semble comporter également un aspect innovant. Cette démonstration est basée sur les deux premiers cas d'égalité d'un couple de triangles sphériques (c'est-à-dire, lorsque les côtés des deux triangles sont respectivement égaux ou bien lorsqu'un angle de l'un des triangles est égal à un angle de l'autre et que les côtés qui entourent l'un de ces angles sont respectivement égaux à leurs homologues de l'autre triangle). Malheureusement, les démonstrations des deux cas mentionnés se trouvaient vraisemblablement dans les paragraphes perdus du deuxième chapitre. Bien que la plupart des tournures terminologiques de l'*Istikmāl* soient empruntées, nous remarquons que le langage utilisé dans les énoncés ainsi que dans les textes des démonstrations est parfois moins exact et moins judicieux que chez les autres mathé-

[41] La généralisation est ici, en général, d'aspect purement accumulatif consistant à reformuler plus d'une proposition en une seule ; voir par exemple les propositions des paragraphes 18 et 19 des *Sphériques* d'Ibn Hūd [Al-Houjairi 2005, vol. 1 : p. 255, 285 ; vol. 2 : p. 46, 53].

[42] Voir les propositions n° 20 et n° 21 [Al-Houjairi 2005, p. 73, 74].

maticiens connus comme al-Khayyām ou Ibn ‘Irāq. Le texte manuscrit contient un nombre élevé de fautes grammaticales. Nous rencontrons parfois dans les propositions des conditions superflues ainsi que des passages géométriques erronés. Dans plusieurs cas, les démonstrations ne couvrent pas toutes les possibilités que l’on doit considérer, elles se limitent à des cas particuliers.

Il faut avouer cependant, que l’apparition d’un nouveau style de rédaction « encyclopédique » en mathématiques dans un livre comme l’*Istikmāl*, nous place devant un problème épistémologique. Roshdi Rashed écrit : « Toute la question en revanche reste de savoir quand et pourquoi ce style de rédaction encyclopédique en mathématiques, qui était jusque-là l’apanage des philosophes, comme Ibn Sinā dans *al-Shifā’*, a été récupéré à l’ouest islamique par les mathématiciens, à l’exemple d’Ibn Hūd. Celui-ci, héritier des grands mathématiciens – Banū Mūsā, Ibn Qurra, Ibn Sinān, Ibn al-Haytham, Ibn al-Samh…– pouvait engager cette rédaction encyclopédique. » [Rashed 1996, p. 979].

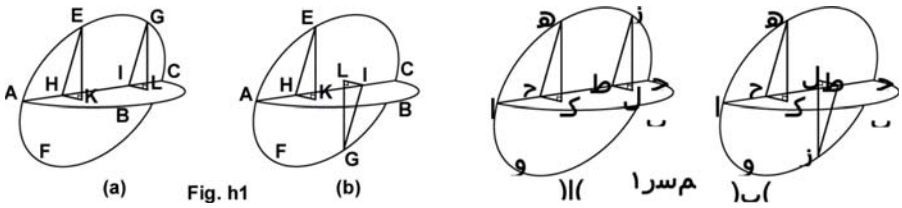
À l’époque d’Ibn Hūd, l’*Istikmāl* représentait un grand ouvrage scientifique alors que sa composition exigeait, sans doute, une longue formation polyvalente en mathématiques et un travail quasi-perpétuel sur la rédaction des textes. Il est donc très peu probable, que ce livre ait pu être composé pendant les intervalles de repos d’un dirigeant politique. Nous sommes enclins à penser que l’*Istikmāl* a été écrit par un groupe d’auteurs sous la direction d’un dirigeant politique qui est probablement Ibn Hūd. Il semble également que l’écriture d’un tel « manuel encyclopédique » en mathématiques ait été une partie d’une plus grande tâche consistant à rédiger des livres portant sur d’autres disciplines scientifiques : l’analyse du texte manuscrit montre, par les emprunts littéraux et massifs aux prédécesseurs, que l’*Istikmāl* devait être un genre classique d’un manuel encyclopédique en mathématiques et il était alors planifié pour inclure l’astronomie, l’optique et l’harmonique.

L’*Istikmāl* ne couvre pas entièrement le contenu des *Sphériques* de Théodose et de Ménélaüs. Certaines propositions de ces livres manquent à la liste d’Ibn Hūd. C’est le cas, par exemple, de la proposition III. 5 de Ménélaüs qui était un sujet d’un débat intensif dans la *Tradition Géométrique Arabe*. Bien qu’Ibn ‘Irāq, en se basant sur le théorème de sinus, ait démontré cette proposition à deux reprises bien connues, les auteurs de l’*Istikmāl* soit n’étaient pas au courant de cette démonstration, soit ils étaient décidés à ne pas franchir la limite connue et bien comprise des *sphériques grecques classiques*.

Enfin, il faut noter qu’en comparant le texte d’Ibn Hūd avec celui de Ménélaüs (tel qu’on trouve dans le livre d’Ibn ‘Irāq) et avec les commentaires propres d’Abū Nasr, nous remarquons que les *Sphériques* de l’*Istikmāl* reflètent une tendance – bien que très faible en l'absence du théorème des sinus – vers une reprise par des démonstrations « *intrinsèques* » de quelques théorèmes sphériques.

III. TEXTES MANUSCRITS ET TRADUCTIONS

§ 9 -. <Proposition n° 34> (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd) [Ibn Hūd, folios 82v-83r], (voir la Fig. h1)



(a) Fig. h1 (b)

Soient deux grands cercles sur la surface de la sphère, sur l'un desquels on sépare, à partir de l'un de leurs deux points d'intersection, deux arcs, chacun plus petit qu'un demi-cercle. On mène de l'extrémité de <chacun de ces> deux arcs, deux perpendiculaires au plan de l'autre cercle. Alors le rapport de la corde du double de l'un des deux arcs à la corde du double de l'autre arc, est comme le rapport de la perpendiculaire menée de l'extrémité du <premier arc> à la perpendiculaire menée de l'extrémité de l'autre arc, que les arcs soient du même côté ou non.

ط <شكل رقم ٣٤> **(رسم ١)**

كُلُّ دائِرَتَيْنِ مِنَ الدَوائِرِ العِظامِ الّتي تَقَعُ في بَسيطِ الكُرَةِ، تُفْصَلُ مِنْ إحْداهُما قَوْسانِ اقَلُّ مِنْ نِصْفَيْ دائِرَةٍ مِمّا يَلي إحْدَى نُقْطَتَيْ تَقاطُعِهِما، ويُخْرَجُ مِنْ طَرَفَيِ القَوْسَيْنِ عَمودانِ عَلَى سَطْحِ الدائِرَةِ الأُخْرَى؛ فَإنّ نِسْبَةَ وَتَرِ ضِعْفِ إحْدَى القَوْسَيْنِ إلَى وَتَرِ ضِعْفِ القَوْسِ الأُخْرَى مِنْهُما كَنِسْبَةِ العَمودِ الخارِجِ مِنْ طَرَفِها إلَى العَمودِ الخارِجِ مِنْ طَرَفِ القَوْسِ الأُخْرَى، كانَتِ القَوْسانِ جَميعاً في جِهَةٍ واحِدَةٍ أو في جِهَتَيْنِ مُخْتَلِفَتَيْنِ؛ مِثالُ ذَلِكَ: دائِرَتا ا؟ب؟ج؟د ا؟ه؟ج<و>، وَهُما مِنَ الدَوائِرِ العِظامِ الّتي في بَسيطِ

Exemple : soient, sur la surface de la sphère, les deux grands cercles ABCD, AEC<F> /[83r] qui se coupent en deux points A et C. On sépare du cercle ACEF deux arcs AE et AG, chacun plus petit qu'un demi-cercle. On mène de E et G, deux perpendiculaires au plan du cercle ABCD.

Je dis que le rapport de la corde du double de l'arc AE à la corde du double de l'arc AG, est comme le rapport de la perpendiculaire menée du point E à la perpendiculaire menée du point G.

Démonstration : l'intersection des deux cercles ABCD, AECF est leur diamètre, que ce soit AC. Des deux points E et G, menons deux perpendiculaires sur AC, soient EH et GI. Si elles étaient perpendiculaires au plan du cercle ABC, on aurait démontré ce que nous voulions, car elles seraient dans ce cas les Sinus des deux arcs AE et AG. Sinon, menons des deux points E et G, deux perpendiculaires au plan du cercle ABCD, soient EK et GL. Elles sont parallèles. Menons également les deux droites LI, KH. Les deux droites EH et GI sont également parallèles. Mais si deux droites entourant un certain angle sont parallèles à deux autres droites entourant un autre angle, alors les deux angles sont égaux[43], par conséquent, l'angle

الكُرَة / [٨٣و] وَقَدْ تَقاطَعَتا عَلَى نُقْطَتَيْ ا ج، وفُصِلَ[١] مِنْ دائِرَةِ ا؟ج؟ه؟و قَوْسانِ كُلُّ واحِدَةٍ[٢] مِنْهُما أَقَلُّ من نِصْفِ[٣] دائِرَةٍ، وهُما ا؟ه ا؟ز. وأُخْرِجَ[٤] مِنْ ه ز عَمودانِ عَلَى سَطْحِ دائِرَةِ ا؟ب؟ج؟د. فَأقولُ: إنّ نِسْبَةَ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ه إلَى وَتَرِ[٥] ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ز كَنِسْبَةِ العَمودِ الّذي أُخْرِجَ مِنْ نُقْطَةِ ه إلَى العَمودِ الّذي أُخْرِجَ مِنْ نُقْطَةِ ز. بُرهانُ[٦] ذَلِكَ، أنّ الفَصْلَ المشْتَرَكَ لِدائِرَتَيْ ا؟ب؟ج؟د ا؟ه؟ج؟و هُوَ قُطْراهُما، فَلْيَكُنْ قُطْرَ[٧] ا؟ج، ونُخْرِجُ من نُقْطَتَيْ ه ز عَمودَيْنِ عَلَى ا؟ج وَهُما ه؟ح ز؟ط؛ فَإنْ كانا عَمودَيْنِ عَلَى سَطْحِ دائِرَةِ ا؟ب؟ج فَقَدْ تَبَيَّنَ ما أرَدْنا، لأنّهُما جَيْبا قَوْسَيْ ا؟ه ا؟ز. وإنْ لم يَكونا كذَلِكَ، فأنّا نُخْرِجُ من نُقْطَتَيْ ه ز عَمودَيْنِ عَلَى سَطْحِ دائِرَةِ ا؟ب؟ج؟د، وهما ه؟ك ز؟ل ، فَيَكونا مُتَوازِيَيْنِ؛ ونُخْرِجُ أيْضاً خَطَّيْ ل؟ط ك؟ح. وخَطّا ه؟ح ز؟ط أيْضاً مُتَوازِيانِ؛ وإنْ وازَى خَطّانِ يُحيطانِ بِزاوِيَةٍ خَطَّيْنِ آخَرَيْنِ يُحيطانِ بِزاوِيَةٍ أُخْرَى، فَإنّ الزاوِيَتَيْنِ مُتَساوِيَتان[٨]؛ فَزاوِيَةُ ح؟ه؟ك مُساوِيَةٌ لِزاوِيَةِ ط؟ز؟ل. وزاوِيَتا ه؟ك؟ح ز؟ل؟ط قائِمَتان؛ فَمُثَلّثا ه؟ح؟ك ز؟ط؟ل مُتَشابِهانِ؛ فنِسْبَةُ ه؟ح إلَى ز؟ط كَنِسْبَةِ ه؟ك إلَى ز؟ل، وَلَكِنّ نِسْبَةَ ه؟ح إلَى ز؟ط كَنِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ه إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ز، لأنّهُما جَيْباهما؛ فنِسْبَةُ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ه إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ز

[43] Cette affirmation manque de précision. Les angles peuvent être supplémentaires.

كَنِسْبَةِ عَمودِ ه؟ك إلَى عَمودِ ز؟ل. وكذَلِكَ نُبَيِّنُ كما قُلْنا، لَوْ أنّ إحْدَى[٩] قَوْسَيْ ا؟ه ا؟ز مِنْ جِهَةِ ا؟و. وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّن.

٠ إحدى: احد؛ ١. فصل : اللاّم مَطْموسة؛ ٢. واحِدَة : واحد؛ ٣. نصف : حرفا الصاد والفاء مطموسان؛ ٤. وأُخرج : حرفا الراء والجيم مطموسان؛ ٥. إلى وتر : حرفا الألف المقصورة والواو مطموسان؛ ٦. برهان : أحرف الباء والراء والهاء مطموسة؛ ٧. فليكن قطر : حرفا النون والقاف مطموسان؛ ٨. هذا الحكم غير دقيق، فقد يكون، مثلاً، مجموع الزاويتين مساوياً لقائمتين؛ ٩. إحدى : أضافها الناسخ على الهامش، بعد أن ضرب بالقلم فوق كلمة نسبة.

HEK est égal à l'angle IGL. Mais les deux angles EKH, GLI sont droits, donc les deux triangles EHK, GIL sont semblables ; par suite, le rapport de EH à GI est comme le rapport de EK à GL. Mais le rapport de EH à GI est comme le rapport de la corde du double de l'arc AE à la corde du double de l'arc AG - puisque ce sont leurs Sinus - donc le rapport de la corde du double de l'arc AE à la corde du double de l'arc AG est égal au rapport de la perpendiculaire EK à la perpendiculaire GL.

Si l'un des deux arcs AE, AG est du côté de AF, on montre ce que nous avons dit de la même manière. C'est ce que nous voulions montrer. »

§ 10 - <Proposition n° 35> (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd) [Ibn Hūd, folios 83[r]-83[v]], (voir : Fig. h2 et Fig. h3).

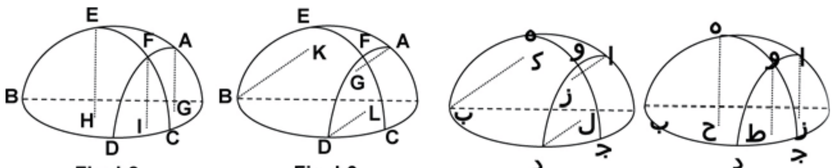


Fig. h2 Fig. h3 رسم٣ رسم٢

ي <شكل رقم ٣٥> **(رسم ٢و٣)**

وإذْ قَدَّمْنا هَذِهِ الـمُقَدِّمَةَ، فَلتَتَقاطَعْ فيما بَيْنَ قَوْسَيْ ا؟ب ب؟ج قَوْسا ا؟د ج؟ه عَلَى نُقْطَةِ و، ولتَكُنْ هَذِهِ القِسِيُّ من الدَوائِرِ العِظامِ الّتي تَقَعُ في الكُرَةِ، ولتَكُنْ كُلُّ قَوْسٍ مِنْها أَقَلَّ مِنْ نِصْفِ دائِرَةٍ؛ فَأقولُ، إنّ نِسْبَةَ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ب إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب؟ه مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟د إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ د؟و، وَمِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و؟ج إلَى وَتَرِ ضِعْفِ[١] قَوْسِ ج؟ه. وبُرْهانُ ذَلِكَ: أنّا نُخْرِجُ من نُقَطِ[٢] ا ه و أعْمِدَةً عَلَى سَطْحِ دائِرَةِ قَوْسِ ب؟ج، وهِيَ أعْمِدَةُ ا؟ز ه؟ح و؟ط، وَنَجْعَلُ عَمودَ و؟ط وَسَطاً في النِسْبَةِ بَيْنَ عَمودَيْ ا؟ز ه؟ح؛ فَتَكونُ نِسْبَةُ ا؟ز إلَى ه؟ح مُؤَلَّفَةً من نِسْبَةِ ا؟ز إلَى و؟ط وَمِنْ نِسْبَةِ و؟ط إلَى ه؟ح. فَأمّا نِسْبَةُ عَمودِ ا؟ز إلَى عَمودِ ه؟ح فَقَدْ بَيّنّا بِالـمُقَدِّمَةِ، أنّها كَنِسْبَةِ وَتَرِ

Après avoir introduit ce qui précède, que les deux arcs AD et CE se coupent entre les deux arcs AB et BC au point F, et qu'ils soient des arcs de grands cercles situés sur une sphère, et que chacun d'eux soit plus petit qu'un demi-cercle.

Je dis que le rapport de la corde du double de l'arc *AB* à la corde du double de l'arc *BE* est composé du rapport de la corde du double de l'arc *AD* à la corde du double de l'arc *DF* et du rapport de la corde du double de l'arc *FC* à la corde du double de l'arc *CE*.

Démonstration (voir la Fig. h2) : menons des points *A*, *E*, *F*, des perpendiculaires au plan du cercle de l'arc BC, soient les perpendiculaires *AG*, *EH*, *FI*, et posons la perpendiculaire *FI* moyenne proportionnelle entre les deux perpendiculaires *AG* et *EH*. Alors, le rapport de *AG* à *EH* est composé du rapport de AG à FI et du rapport de *FI* à *EH*. Quant au rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *EH*, nous avons montré dans ce qui précède, qu'il est comme le rapport de la corde du double de l'arc *AB* à la corde du double de l'arc *BE* ; quant au rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *FI*, il est comme le rapport de la corde du double de l'arc *AD* à la corde du double de l'arc *DF* ; et quant au rapport de la perpendiculaire *FI* à la perpendiculaire *EH*, nous montrons qu'il est comme le rapport de la corde du double de l'arc FC à la corde du double de l'arc *CE*.

Alors le rapport de la corde du double de l'arc *AB* à la corde du double de l'arc *BE*, est composé du rapport de la corde du double de l'arc *AD* à la corde du double de l'arc *FD* et du rapport de la corde du double de l'arc *CF* à la corde du double de l'arc *CE*.

Je dis également que, dans le cas de la diérèse, le rapport de la corde du double /[83v] de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *BE* est composé du rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *FD* et du rapport de la corde du double de l'arc *CD* à la corde du double de l'arc *CB*.

Démonstration (voir la Fig. h3) : menons des points *A*, *B* et *D*, au plan du cercle de l'arc CFE, les perpendiculaires *AG*, *BK*, *DL* et posons *DL*

ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ب إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب؟ه، وأمّا نِسْبَةُ عَمودِ ا؟ز إلَى عمود و؟ط فكَنِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟د إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ د؟و، وأمّا نِسْبَةُ عَمودِ و؟ط إلَى عَمودِ ه؟ح فَتَبَيَّنُ أنّها كَنِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و؟ج إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ج؟ه. فنِسْبَةُ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ب إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب؟ه مُؤَلَّفَةٌ[٣] مِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟د إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و؟د، وَمِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ[٤] قَوْسِ ج؟و إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ج؟ه؛ وَأقولُ أيْضاً إنّهُ عَلَى جِهَةِ التَفْصيل تَكونُ نِسْبَةُ وَتَرِ ضِعْفِ /**[٨٣ظ]** قَوْسِ ا؟ه إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب؟ه مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ <وَتَرِ>[٥] ضِعْفِ قَوْسِ ا؟و إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و؟د، وَمِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ج؟د إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ج؟ب. وَبُرْهانُ ذَلِكَ: أنّا نُخْرِجُ من نُقَطِ[٦] ا ب د إلَى سَطْحِ دائِرَةِ قَوْسِ ج؟و؟ه أعْمِدَةَ ا؟ز ب؟ك د؟ل، وَنَجْعَلُ د؟ل وَسَطاً في النِسْبَةِ بَيْنَ عَمودَيْ ا؟ز ب؟ك، فَتَكونُ نِسْبَةُ عَمودِ[٧] ا؟ز إلَى عَمودِ ب؟ك مُؤَلَّفَةً من نِسْبَةِ عَمودِ ا؟ز إلَى عَمودِ د؟ل، وَمِنْ نِسْبَةِ عَمودِ د؟ل إلَى عَمودِ ب؟ك. فأمّا نِسْبَةُ عَمودِ ا؟ز إلَى عَمودِ ب؟ك فكَنِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ه إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب؟ه، وأما نِسْبَةُ عَمودِ ا؟ز إلَى عَمودِ د؟ل، فكَنِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟و إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و؟د، وأمّا نِسْبَةُ عَمودِ د؟ل إلَى عَمودِ ب؟ك، فهيَ كَنِسْبَةِ وَتَرِ

moyenne proportionnelle entre les deux perpendiculaires AG et BK. Le rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *BK* est donc composé du rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *DL* et du rapport de la perpendiculaire *DL* à la perpendiculaire *BK*. Quant au rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *BK*, il est comme le rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *BE* ; quant au rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *DL*, il est comme le rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *FD* ; et quant au rapport de la perpendiculaire *DL* à la perpendiculaire *BK*, il est comme le rapport de la corde du double de l'arc *DC* à la corde du double de l'arc *CB*, comme on l'a montré dans ce qui précède. Alors le rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *EB* est composé du rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *FD* et du rapport de la corde du double de l'arc *CD* à la corde du double de l'arc *CB*. C'est ce que nous voulions montrer.

ضِعْفِ قَوْسِ د؟ج إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ج؟ب، كَما تَبَيَّنَ في الـمُقَدِّمَةِ الّتي قَدَّمْنا. فنِسْبَةُ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ه إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ه؟ب مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟و إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و؟د، وَمِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ج؟د إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ج؟ب؛ وذَلِكَ ما أَرَدْنا أَنْ نُبَيِّنَ.

[١]. كُتِبَ على الهامِشِ : "وَنَبْدَأُ عَلَى التَرْتيبِ وأمّا عَلَى <العَكْسِ>، فَنِسْبَةُ وَتَرِ <ضِعْفِ قَوْسِ ألف ها> إلى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ با ها مُؤلَّفَةٌ مِن نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ <ألف واو> إلى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ واو دال وَمِن نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ جيم دال إلى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ جيم با"؛ [٢]. نقط : نقطة؛ [٣]. مؤلَّفة : حرفا اللام والفاء مطموسان؛ [٤]. ضعف : حرف الفاء مطموس؛ [٥]. <وتر> : مطموسة ؛ [٦]. نقط : نقطة؛ [٧]. عمود : أحرف العين والميم والواو مطموسة؛

§ 11 - <Proposition n° 36> (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd) [Ibn Hūd, folios 83^v-84^r], (voir la Fig. h4).

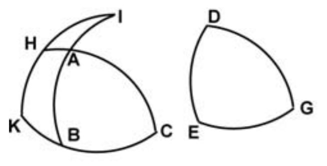
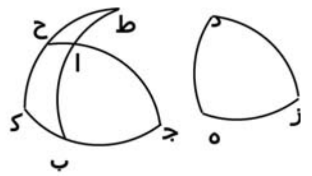


Fig. h4



رسم٤

« Si, sur la surface de la sphère, deux figures trilatères ont un angle égal à un angle, et si deux autres de leurs angles <pris chacun dans une des figures> sont soit égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits, alors les rapports des homologues des deux côtés qui sous-tendent les deux angles égaux, aux homologues des deux côtés qui sous-tendent les deux autres angles qui sont égaux ou <d'une somme> égale à deux droits, sont deux rapports égaux. Et réciproquement.

J'entends par l'expression *homologue de l'arc*, la ligne droite qui sous-tend <l'arc> double.

<*Exemple*:> soient ABC et DEG deux figures trilatères ; supposons que l'angle qui est en A soit égal à l'angle D et que les angles qui sont aux deux points C et G soient égaux ou bien soient d'une somme égale à deux angles droits. Je dis que le rapport de l'homologue de AB à l'homologue de BC est égal au rapport de l'homologue de DE à l'homologue de EG.

Démonstration : prolongeons les deux arcs CA et BA jusqu'en H et I et posons l'arc AH égal à l'arc DG et l'angle AHI égal à l'angle EGD ; pro-

يا <شَكْل رقم ٣٦> **(رسم ٤)**

إذا كانَتْ زاوِيَتانِ مِنْ زَوايا شَكْلَيْنِ مِنَ الأشْكالِ ذَواتِ الأضْلاعِ الثَلاثَةِ عَلَى بَسيطِ كُرَةٍ مُتَساوِيَتَيْنِ؛ وكانَتْ زاوِيَتانِ أُخْرَيانِ مِنْ زَواياهُما إمّا مُتَساوِيَتَيْنِ وإمّا مُساوِيَتَيْنِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ إذا جُمِعَتا[1]؛ فإنّ نِسْبَةَ نَظيرَيِ الضِلْعَيْنِ اللّذَيْنِ يُوَتِّرانِ الزاوِيَتَيْنِ[2] الـمُتَساوِيَتَيْنِ إلَى نَظيرَيِ الضِلْعَيْنِ اللّذَيْنِ يُوَتِّرانِ الزاوِيَتَيْنِ <الأُخْرَيَيْنِ> الـمُتَساوِيَتَيْنِ[3] أو الـمُساوِيَتَيْنِ لِقائِمَتَيْنِ <إذا جُمِعَتا>، هُما نِسْبَتان مُتَساوِيتانِ، وعَكْسُ ذَلِكَ أيْضاً؛ وأعْني بقَوْلي نظير القَوْسِ الخَطَّ الـمُسْتَقيمَ الّذي يُوَتِّرُ ضِعْفَها؛ فَلْيَكُنْ شَكْلانِ ذَوا ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، عَلَيْهِما ا ب جـ د هـ ز وَلْتَكُنِ الزاوِيَةُ الّتي عِنْدَ ا من أحَدِهِما مُساوِيَةً لِلزاوِيَةِ الّتي عِنْدَ د مِنَ الآخَرِ؛ وَلْتَكُنِ الزاوِيَتانِ مِنْهُما اللّتانِ عِنْدَ نقطَتَي[4] جـ ز إمّا مُتَساوِيتَيْنِ وإمّا مُساوِيَتَيْنِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ<إذا جُمِعَتا>؛ فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ نَظيرِ ا؟ب إلَى نَظيرِ ب؟ج كَنِسْبَةِ نَظيرِ د؟ه إلَى نَظيرِ ه؟ز[5]؛ بُرْهانُهُ: أنّا نُخْرِجُ قَوْسَيْ ج؟ا؟ح ب؟ا؟ط[6]، وَنَجْعَلُ قَوْسَ ا؟ح مِثْلَ قَوْسِ د؟ز، وزاوِيَةُ ا؟ح؟ط مُساوِيَةٌ لِزاوِيَةِ ه؟ز؟د؛ وَنُخْرِجُ

longeons les deux arcs CB et HI jusqu'à ce qu'ils se coupent au point K, ainsi l'arc AI est égal à l'arc ED et l'arc IH est égal à l'arc EG. Puisque les deux angles BCA et AHI sont, soit égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits, l'homologue de l'arc CK est égal à l'homologue de l'arc KH ; et puisque la figure reste inchangée[44], le rapport de l'homologue de l'arc IH à l'homologue de l'arc KH est composé du rapport de l'homologue de l'arc IA à l'homologue de l'arc AB et du rapport de l'homologue de l'arc BC à l'homologue de l'arc CK ; mais l'homologue de l'arc CK est égal à l'homologue de l'arc KH, de sorte que le rapport de l'homologue de l'arc HI à l'homologue de l'arc KC est composé du rapport de l'homologue de l'arc IA à l'homologue de l'arc AB et du rapport de l'homologue de l'arc BC à l'homologue de l'arc CK.

Posons BC moyenne proportionnelle entre HI et CK, alors le rapport de l'homologue de l'arc HI à l'homologue de l'arc /[**84r**] CK est composé du rapport de l'homologue de l'arc HI à l'homologue de l'arc CB et du rapport de l'homologue de l'arc CB à l'homologue de l'arc CK. Si nous enlevons[45] le rapport de l'homologue de l'arc CB à l'homologue CK des deux rapports, il reste le rapport de l'homologue de l'arc HI à l'homologue de l'arc BC égal au rapport de l'homologue de l'arc IA à l'homologue de l'arc AB. Si nous permutons, ils restent également propor-

قَوْسَيْ ج؟ب ح؟ط حَتَّى تَلْتَقِيا عَلَى نُقْطَةِ ك فتَكونُ قَوْسُ ا؟ط مُساوِيَةً لِقَوْسِ ه؟د وقَوْسُ ط؟ح لِقَوْسِ ه؟ز؛ وَلأنَّ زاوِيَتَيْ ب؟ج؟ا ا؟ح؟ط إمّا مُتَساوِيَتانِ[٧] وإمّا مُساوِيَتانِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ إذا جُمِعَتا؛ يَكونُ نَظيرُ قَوْسِ ج؟ك مُساوِياً[٨] لِنَظيرِ قَوْسِ ك؟ح؛ ولأنَّ الصورَةَ عَلَى ما هِيَ عَلَيْهِ، تَكونُ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ط؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ك؟ح مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ط؟ا إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب، ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟ك؛ وَلَكِنَّ نَظيرَ قَوْسِ ج؟ك مُساوٍ لِنَظيرِ قَوْسِ ك؟ح، فتَكونُ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ح؟ط إلَى نَظيرِ قَوْسِ ك؟ج مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ط؟ا إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب، ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟ك؛ وَنَجْعَلُ ب؟ج وَسَطاً في النِسْبَةِ بَيْنَ ح؟ط وَ ج؟ك؛ فتَكونُ أيْضاً نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ح؟ط إلَى نَظيرِ قَوْسِ /[**84و**] ج؟ك مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ح؟ط إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟ب، ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ج؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟ك، فَإذا طَرَحْنا نِسْبَةَ نَظيرِ قَوْسِ ج؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟ك مِنْ كِلْتا[٨] النِسْبَتَيْنِ تَبْقَى نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ح؟ط إلَى نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ط؟ا إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب. وَإذا بَدَّلْنا أيْضاً تَكونُ مُتَناسِبَةً؛ وَلَكِنَّ قَوْسَ ط؟ح مُساوِيَةٌ لِقَوْسِ ه؟ز، وَقَوْسُ ا؟ط مُساوِيَةٌ لِقَوْسِ ه؟د، فَنِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ج؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب

[44] C.-à-d., comme le cas précédent (proposition n° 35).
[45] Il s'agit d'une simplification.

كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ه؟ز إلَى نَظيرِ قَوْسِ ه؟د. وأيْضاً فَإنّا نَجْعَلُ الزاوِيَةَ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ ا مُساوِيَةً لِلزاوِيَةِ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ د، وَلْتَكُنْ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ج؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ه؟ز إلَى نَظيرِ قَوْسِ ه؟د. فَأقولُ إنّ الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ج ز إمّا مُتَساوِيَتانِ[٩] وإمّا مُساوِيَتانِ <إذا جُمِعَتا> لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ. وَبُرْهانُهُ، أنّا إذا عَمِلْنا مِثْلَ العَمَلِ الـمُتَقَدِّمِ كانَتْ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ج؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب كَنِسْبَةِ نَظيرِ ح؟ط إلَى نَظيرِ ا؟ط، وإذا بَدَّلْنا كانَتْ أيْضاً مُتَناسِبَةً؛ فَإذا كانَتِ الصورَةُ عَلَى ما هِيَ عَلَيْهِ فَإنّ نَظيرَ قَوْسِ ح؟ك يَكونُ مُساوِياً لِنَظيرِ قَوْسِ ك؟ج، وتَكونُ لِذَلِكَ زاوِيَتا ط؟ح؟ا ا؟ج؟ب اللّتانِ هُما الزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ج ز إمّا مُتَساوِيَتَيْنِ[١٠] وإمّا مُساوِيَتَيْنِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ إذا جُمِعَتا؛ وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ.

tionnels ; mais l’arc IH est égal à l’arc EG et l’arc AI est égal à l’arc ED, donc le rapport de l’homologue de l’arc CB à l’homologue de l’arc AB est égal au rapport de l’homologue de l’arc EG à l’homologue de l’arc ED.

<*Réciproquement*> De même, supposons que l’angle qui est au point A soit égal à l’angle qui est au point D et que le rapport de l’homologue de l’arc CB à l’homologue de l’arc AB soit égal au rapport de l’homologue de l’arc EG à l’homologue de l’arc ED.

Je dis que les deux angles qui sont aux deux points C et G sont soit égaux, soit d’une somme égale à deux angles droits.

Démonstration : si nous procédons comme précédemment, le rapport de l’homologue de l’arc CB à l’homologue de l’arc AB est comme le rapport de l’homologue de HI à l’homologue de AI et si nous permutons ils restent également proportionnels ; puisque la figure reste inchangée, l’homologue de l’arc HK est égal à l’homologue de l’arc KC et par suite, les deux angles IHA et ACB qui sont aux deux points C et G sont soit égaux, soit d’une somme égale à deux angles droits. C’est ce que nous voulions montrer. »

---

[١]. يتبيّن من هذا وممّا يلي أنّ المقصود زاويتان مساويتان لِزاويتين قائمتين إذا جُمِعتا وذلك على الرغم من تكرار الخطأ المتمثّل باستعمال كلمة "قائمتان" عِوضاً عن كلمة "متساويتان"؛ [٢]. الزاويتين : الزاويتان؛ [٣]. الأُخريين المتساويتين : القائمتين؛ [٤]. نقطتي : نقطة؛ [٥]. زاي : دال؛ [٦]. ج؟ا؟ح ب؟ا؟ط: ج؟ا؟ج ب؟ا؟ط؛ [٧]. متساويتان : قائمتين؛ [٨]. وضع الناسخ إشارة فوق كلمة "مساويا" وكتب على الهامش : "تبيّن ذلك في الشكل الثالث من هذا الفصل إذاً تدبّر."؛ [٨]. كلتا: كلتي؛ [٩]. متساويتان : قائمتان؛ [١٠]. متساويتين : قائمتين.

§ 12 - <Proposition n° 37> (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd) [Ibn Hūd, folios 84^{r}-84^{v}], (voir la Fig. h5).

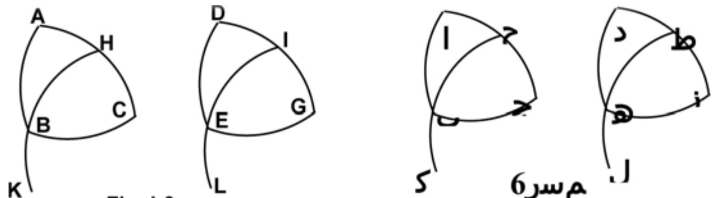


Fig. h6

Si deux figures trilatères sont telles que deux angles <respectifs> parmi leurs angles à la base, sont égaux chacun à un angle droit et si les deux angles restants à la base sont égaux et non droits, le rapport des deux homologues des deux côtés entourant l'angle droit de l'une des deux figures, l'un à l'autre, est alors composé du rapport correspondant des deux homologues des deux côtés entourant l'angle droit de l'autre figure, l'un à l'autre, et du rapport de l'homologue de l'arc qui est entre le point du sommet de la première figure et le pôle de sa base, à l'homologue de l'arc, qui est entre le point du sommet de l'autre figure et le pôle de sa base.

<*Exemple*> :

soient deux figures trilatères *ABC* et *DEG*. Que les deux angles qui sont aux deux points A et D soient droits, que les deux angles qui sont aux

يب <شَكْل رقم ٣٧> (رسم ٥)

إذا كانَ شَكْلانِ ذَوا ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، وكانَتْ زاوِيَتانِ من زَواياهما الّتي عَلَى القاعِدَةِ، كلُّ واحِدَةٍ مِنْهُما قائِمَةً، وَكانَتِ الزاوِيَتانِ الباقِيَتانِ مِنَ الزَوايا الّتي عَلَى القاعِدَةِ[1] مُتَساوِيَتَيْنِ غَيْرَ قائِمَتَيْنِ، فَإنّ نِسْبَةَ نَظيرَيِ الضِلْعَيْنِ المُحيطَيْنِ بِالزاوِيَةِ القائِمَةِ مِن أحَدِ الشَكْلَيْنِ، أحَدُهُما إلَى الآخَرِ، مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ نَظيرَيِ الضِلْعَيْنِ المُحيطَيْنِ بِالزاوِيَةِ القائِمَةِ مِنَ الشَكْلِ الآخَرِ، أحَدُهُما إلَى الآخَرِ، إذا ما أُخِذَتْ عَلَى ما أُخِذَت عَلَيْهِ النِسْبَةُ الأُولَى، ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ القَوْسِ الّتي تَكونُ فيما بَيْنَ نُقْطَةِ رَأسِ الشَكْلِ الأوّلِ وبَيْنَ قُطْبِ قاعِدَتِهِ إلَى نَظيرِ القَوْسِ الّتي تَكونُ فيما بَيْنَ نُقْطَةِ رأسِ الشَكْلِ الآخَرِ وبَيْنَ قُطْبِ قاعِدَتِهِ.

<مِثالُ ذَلِكَ>: فَلْيَكُنْ شَكْلانِ ذَوا ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، عَلَيْهِما ا ب ج د ه ز، وَلْتَكُنِ الزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ

deux points *C* et *G* soient égaux et non droits et que *H* et *I* soient les deux pôles <respectifs> des deux arcs *AC* et *DG*.

Je dis que le rapport de l'homologue de l'arc *AB* à l'homologue de l'arc *AC* est composé du rapport de l'homologue de l'arc *ED* à l'homologue de l'arc *DG* et du rapport de l'homologue de l'arc *BH* à l'homologue de l'arc EI.

Démonstration : posons l'arc *CK* égal à l'arc *DG* et menons l'arc *HK* <qui rencontre *BC* en L>. L'arc *KL* est égal à l'arc *DE* et l'arc *LH* est égal à l'arc *EI*, mais puisque la figure reste inchangée, le rapport de l'homologue de l'arc *AB* à l'homologue de l'arc *BH* est composé du rapport de l'homologue de l'arc *AC* à l'homologue de l'arc *CK* et du rapport de l'homologue de l'arc *KL* à l'homologue de l'arc *LH*, et le rapport de l'homologue de l'arc *BA* à l'homologue de l'arc *CA* est composé du rapport de l'homologue de l'arc *BH* à l'homologue de l'arc *LH* et du rapport de l'homologue de l'arc *LK* à l'homologue de l'arc *KC*, d'après le quatrième cas parmi les 18 cas de composition des rapports. Mais l'arc *KC* est égal à l'arc *DG*, l'arc *KL* est égal à l'arc *DE* et l'arc *LH* est égal à *EI*. Donc le rapport de l'homologue de l'arc *AB* à l'homologue de l'arc *AC* est composé du rapport de l'homologue de l'arc *ED* à l'homologue de l'arc *DG* et du rapport de

نُقْطَتَيْ ا د مِنْهُما قائِمَتَيْنِ، وَلْتَكُنِ الزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ جـ ز مُتَساوِيتَيْنِ غَيْرَ قائِمَتَيْنِ، وَليَكُنْ قُطْبا قَوْسَيْ ا؟جـ د؟ز نُقْطَتَيْ ح ط. فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟جـ مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ هـ؟د إلَى نَظيرِ قَوْسِ د؟ز ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ هـ؟ط. وبُرْهانُ ذَلِكَ: أنّا نَجْعَلُ قَوْسَ جـ؟ك مُساوِيَةً لِقَوْسِ د؟ز ونُخْرِجُ قَوْسَ ح؟ك <لِتَلْقَى ب؟جـ عَلَى نُقْطَةِ ل>[٢]، فتَكونُ قَوْسُ ك؟ل مُساوِيَةً[٣] لِقَوْسِ د؟هـ وقَوْسُ ل؟ح لِقَوْسِ هـ؟ط، وَلَكِنْ مِنْ أجْلِ أنّ الصورَةَ عَلَى ما هِيَ عَلَيْهِ، تَكونُ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ب؟ح مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ا؟جـ إلَى نَظيرِ قَوْسِ جـ؟ك ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ك؟ل إلَى نَظيرِ قَوْسِ ل؟ح، وتَكونُ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ا إلَى نَظيرِ قَوْسِ جـ؟ا مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ل؟ح ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ل؟ك إلَى نَظيرِ قَوْسِ ك؟جـ[٤]، لأنّهُ الوَجْهُ الرابِعُ مِن الوُجوهِ الثَمانِيَةِ عَشَرَ في تَأليفِ النِسْبَةِ، وَلَكِنّ قَوْسَ ك؟جـ مُساوِيَةٌ لِقَوْسِ د؟ز وقَوْسُ ك؟ل لِقَوْسِ د؟هـ وقَوْسُ ل؟ح لِقَوْسِ هـ؟ط، فنِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟جـ مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ هـ؟د إلَى نَظيرِ قَوْسِ د؟ز، ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ هـ؟ط، ومِنَ البَيِّنِ أيْضاً أنّ نِسْبَةَ نَظيرِ قَوْسِ ب؟جـ إلَى نَظيرِ قَوْسِ جـ؟ا مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ

l'homologue de l'arc *BH* à l'homologue de l'arc *EI*. Il est clair aussi que le rapport de l'homologue de l'arc *BC* à l'homologue de l'arc *CA* est composé du rapport /[**84**[v]] de l'homologue de l'arc *EG* à l'homologue de l'arc *DG* et du rapport de l'homologue de l'arc *BH* à l'homologue de l'arc *EI*, parce que, si nous inversons le premier rapport, le rapport de l'homologue de *CA* à l'homologue de l'arc *AB* sera égal au rapport de l'homologue de *DG* à l'homologue de *DE* multiplié par le rapport de l'homologue de *EI* à l'homologue de *BH*.

Si nous ajoutons[46] aux deux rapports équivalents le rapport de l'homologue de *AB* à l'homologue de *BC* qui est égal - comme l'on a montré dans la proposition précédente - au rapport de l'homologue de *DE* à l'homologue EG, le rapport de l'homologue de *CA* à l'homologue de *AB* multiplié par le rapport de l'homologue de *AB* à l'homologue de *BC*, qui est égal au rapport de l'homologue de *AC* à l'homologue de *BC*, devient équivalent au rapport de l'homologue de l'arc *DG* à l'homologue de *DE* multiplié par le rapport de l'homologue de *DE* à l'homologue de *EG*, qui est égal au rapport de l'homologue de l'arc *DG* à l'homologue de *GE*, multiplié par le rapport de l'homologue de *EI* à l'homologue de *BH*, il reste alors le

[46] Il s'agit d'une multiplication.

/**[84ظ]** نَظيرِ قَوْسِ ه؟ز إلَى نَظيرِ قَوْسِ د؟ز، ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ه؟ط، وذَلِكَ أنّا إذا قَلَبْنا النِسْبَةَ الأُولَى، كانَتْ نِسْبَةُ نَظيرِ ج؟ا إلَى نَظيرِ ا؟ب كَنِسْبَةِ نَظيرِ د؟ز إلَى نَظيرِ د؟ه مُثَنّاة بنِسْبَةِ نَظيرِ ه؟ط إلَى نَظيرِ ب؟ح. فإذا زِدْنا عَلَى النِسْبَتَيْنِ المتعادلتَيْنِ نِسْبَةَ نَظيرِ ا؟ب إلَى ب؟ج الّتي هِيَ، عَلَى ما قَدْ[٥] تَبَيَّنَ ذَلِكَ في الشَكْلِ الّذي قَبْلَ هَذا، كَنِسْبَةِ[٦] نَظيرِ د؟ه إلَى نَظيرِ ه؟ز، كانَتْ نِسْبَةُ نَظيرِ ج؟ا إلَى نَظيرِ ا؟ب مُثَنّاة بنِسْبَةِ نَظيرِ ا؟ب إلَى نَظيرِ ب؟ج الّتي هِيَ كَنِسْبَةِ[٧] نَظيرِ ا؟ج إلَى نَظيرِ ب؟ج، مُعادِلَةً لِنِسْبَةِ نَظيرِ د؟ز إلَى نَظيرِ د؟ه مُثَنّاة بنِسْبَةِ نَظيرِ د؟ه إلَى نَظيرِ ه؟ز الّتي هِيَ كَنِسْبَةِ نَظيرِ د؟ز إلَى نَظيرِ ز؟ه مُثَلَّثَةً بنِسْبَةِ نَظيرِ ه؟ط[٨] إلَى نَظيرِ ب؟ح[٩] فَتَبْقَى نِسْبَةُ نَظيرِ ا؟ج إلَى نَظيرِ ج؟ب كَنِسْبَةِ نَظيرِ د؟ز إلَى نَظيرِ ه؟ز مُثَنّاة بنِسْبَةِ نَظيرِ ه؟ط إلَى نَظيرِ ح؟ب، فإذا قَلَبْنا النِسْبَةَ، كانَت نِسْبَةُ نَظيرِ ب؟ج إلَى نَظيرِ ج؟ا كَنِسْبَةِ نَظيرِ ه؟ز إلَى نَظيرِ ز؟د مُثَنّاة بنِسْبَةِ نَظيرِ ح؟ب إلَى نَظيرِ ط؟ه. وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ.

[١] **. كلّ واحدةٍ منهما قائمة، وكانت الزاويتان الباقيتان من الزوايا على القاعدة : أضافها الناسخ على الهامش؛[٢] . إضافة هذه الجملة تجعل النصّ سويّاً؛[٣] . مساوية : وضع الناسخ فوقها إشارة وكتب على الهامش "تبيّن ذلك**

rapport de l'homologue de *AC* à l'homologue de *CB* égal au rapport de l'homologue de *DG* à l'homologue de *EG*, multiplié par le rapport de l'homologue de *EI* à l'homologue de *HB* ; si nous inversons le rapport, le rapport de l'homologue de *BC* à l'homologue de *CA* devient égal au rapport de l'homologue de *EG* à l'homologue de *GD* multiplié par le rapport de l'homologue de *HB* à l'homologue de *IE*. C'est ce que nous voulions montrer. »

في الشكل الرابع من هذا الفصل "؛[٤] . كاف : أثبتها الناسخ على الهامش؛[٥] . على ما قد : أضيفت فوق السطر؛[٦] . أُضيفَتْ على الهامِشِ؛[٧] . وَضَعَ الناسِخُ إشارَةً فَوْقَ كَلِمَةِ "كنسبةَ" وَكَتَبَ على الهامِشِ : من أَجْلِ أنّ نَظيرَ ألف با وَسَطٌ في النِسْبَةِ <بين نظيرَي> ألف جيم، جيم با؛[٨] . ها طا : با ها؛[٩] . با حا : ها طا؛

§ 13 - <Proposition n° 38> (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd) [Ibn Hūd, folio 84v], (voir la Fig. h6).

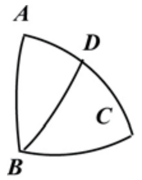


Fig. 7

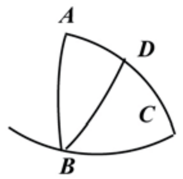


Fig. 7a

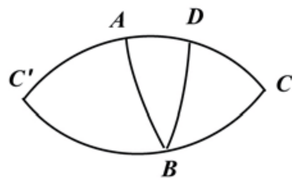


Fig. 7b

Si deux figures trilatères sont telles que leurs angles à la base soient respectivement égaux et non droits, alors si l'on mène des sommets les deux hauteurs de deux figures, les homologues des arcs découpés sur les deux bases sont proportionnels.

<*Exemple* :>

soient *ABC* et *DEG* deux figures trilatères. Que l'angle en A soit égal à l'angle en D, que l'angle en C soit égal à l'angle en G et qu'aucun de

يج <شَكْل رقم ٣٨> **(رسم ٦)**

إذا كانَ شَكْلانِ ذَوا[١] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، وكانَتْ زَواياهما الّتي عَلَى القاعِدَةِ مُتَساوِيةً، كُلُّ زاوِيَةٍ لِنَظيرَتِها، وَلَمْ تَكُنْ زاوِيَةٌ مِنها قائِمَةً، وأُخْرِجَ عَمودا الشَكْلَيْنِ مِن نُقْطَتَيْ رَأسَيْهِما، فَإنّ نَظائِرَ القِسِيِّ الّتي تَنْفَصِلُ مِنَ القاعِدَتَيْنِ تَكونُ مُتَناسِبَةً.

<مِثالُ ذَلِكَ>: فَلْيَكُنْ شَكْلانِ ذَوا ثَلاثَةِ أضْلاعٍ عَلَيْهِما، ا ب جـ د هـ ز. وَلْتَكُنِ الزاوِيَةُ الّتي عِنْدَ <نُقْطَةِ> ا مُساوِيَةً لِلزاوِيَةِ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ د،

ces angles ne soit droit. Menons des deux points *B* et *E* deux perpendiculaires respectives aux bases *AC* et *DG*, soient *BH* et *EI*.

Je dis que le rapport de l'homologue de l'arc *AH* à l'homologue de l'arc *HC* est égal au rapport de l'homologue de l'arc *DI* à l'homologue de l'arc *IG*.

Démonstration :

posons les pôles des deux arcs *AC* et *DG* les deux points respectifs *K* et *L*. Puisque les deux angles aux points *H* et *I* sont droits et les deux angles aux deux points *C* et *G* sont égaux et non droits, le rapport de l'homologue de l'arc *CH* à l'homologue de l'arc *GI* est alors composé du rapport de l'homologue de l'arc *BH* à l'homologue de l'arc EI et du rapport de l'homologue de l'arc *EL* à l'homologue de l'arc *BK*, de sorte que le rapport de l'homologue de l'arc *AH* à l'homologue de l'arc *DI* est égal au rapport de l'homologue de l'arc *CH* à l'homologue de l'arc *GI* ; si on permute ils seront également proportionnels. C'est ce que nous voulions montrer. /[**85**[r]]

والزاوِيَةُ الّتي عِنْدَ ج مِثْلُ الزاوِيَةِ الّتي عِنْدَ ز، ولا تَكونُ واحِدَةٌ مِن هَذِهِ الزَوايا قائِمَةً. ولنُخْرِجْ مِنْ نُقْطَتَيْ ب ه عَمودَيْنِ عَلَى قاعِدَتَيْ ا؟ج د؟ز وَهُما ب؟ح ه؟ط. فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ح؟ج كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ د؟ط إلَى نَظيرِ قَوْسِ ط؟ز. وبُرْهانُ ذَلِكَ أنّا نَجْعَلُ قُطْبَيْ قَوْسَيْ ا؟ج د؟ز نُقْطَتَيْ ك ل. فَلأنّ الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ح ط قائِمَتانِ، والزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ج ز مُتَساوِيتانِ وَلَيْسَتا بِقائِمَتَيْنِ، تَكونُ نِسْبَةُ[٢] نَظيرِ قَوْسِ ج؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ز؟ط مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ه؟ط [مُؤَلَّفَة مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ه ط][٣]، ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ه؟ل إلَى نَظيرِ قَوْسِ ب؟ك. وتَكونُ لِذَلِكَ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ د؟ط كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ج؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ز؟ط، وإذا بَدَّلْنا أيْضاً[٤] تَكونُ مُتَناسِبَةً. وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ./ **[85و]**

١ . ذوا : ذواتا
٢ . وُضِعَتْ إشارَةٌ فَوْقَ كَلِمَةِ "نسبة" وكُتِبَ على الهامِشِ : هذا هو الوَجْهُ التاسِعُ من الوُجوهِ الثَمانِيَةِ عَشَرَ في تَأليفِ النِسْبَةِ
٣ . تكرار في النسخ ينبغي حذفه
٤ . وإذا بدّلنا أيضا : أُثْبِتَت على الهامِشِ بعد أن ضُرِبَ بالريشَةِ فوق العبارة التي وردت في النصّ خطأً.

§ 14 - <Proposition n° 39> (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd) [Ibn Hūd, folio 85r], (voir : Fig. h7 et Fig. h7a).

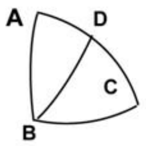


Fig. h7

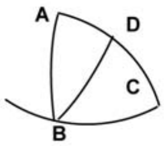
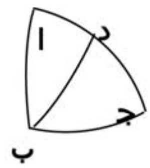
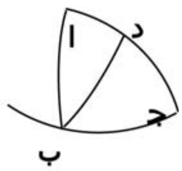


Fig. h7a



مسر٧



مسر٧أ

يد <شَكْل رقم ٣٩>

إذا قُسِمَتْ زاوِيَةٌ مِن زَوايا شَكْلٍ ذي ثَلاثَةِ أضْلاعٍ عَلَى بَسيطِ كُرَةٍ أو الّتي تَليها[١] بنِصْفَيْنِ <بِقَوْسٍ من دائِرَةٍ عَظيمة>. فإنّ نِسْبَتَيْ[٢] نَظيرَيِ الضِلْعَيْنِ إلَى نظيرَيْ قَوْسَيِ القاعِدَةِ نِسْبَتانِ مُتَساوِيتانِ وعَكْسُ<ذَلِكَ> أيْضاً، وعلى الإبْدالِ أيْضاً. <مِثالُ ذَلِكَ>: فَلْيَكُنْ شَكْلٌ ذو ثَلاثَةِ أضْلاعٍ عَلَيْهِ ا ب ج. وَلتَقْسِمْ قَوْسُ ب؟د الزاوِيَةَ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ ب بِنِصْفَيْنِ. فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب إلَى [إلى][٣] نَظيرِ قَوْسِ ا؟د كَنِسْبَةِ[٤] نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟د. وبُرْهانُ ذَلِكَ: لأنّ زاوِيَةَ ا؟ب؟د مِثْلُ زاوِيَةِ ج؟ب؟د والزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَةِ د إذا جُمِعَتا مِثْلُ قائِمَتَيْنِ. فنِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ا إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟د كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟د. وإذا بَدَّلْنا تَكونُ مُتَناسِبَةً. وإنْ كانَتْ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ا؟د إلَى نَظيرِ قَوْسِ

Si, sur la surface de la sphère, un angle d'une figure trilatère, ou l'angle qui lui succède[47], est divisé en deux moitiés <par un arc de grand cercle>, alors les deux rapports des homologues de deux côtés <qui entourent l'angle> aux homologues des deux arcs découpés à la base sont égaux. La réciproque et la permutation sont valables également.

<*Exemple* :> soit une figure trilatère *ABC*. Que l'arc *BD* divise l'angle qui est au point B en deux moitiés.

Je dis que le rapport de l'homologue de l'arc *AB* à l'homologue de l'arc *AD* est égal au rapport de l'homologue de l'arc BC à l'homologue de l'arc *CD*.

Démonstration (voir la Fig. h7) :puisque l'angle *ABD* est égal à l'angle *CBD* et que la somme des deux angles qui sont au point *D* est égale à deux droits, le rapport de l'homologue de l'arc *BA* à l'homo-

[47] C'est-à-dire, l'angle supplémentaire adjacent.

د؟ج، فَأقولُ إنّ قَوْسَ ب؟د قَسَمَتْ زاوِيَةَ ا؟ب؟ج بِنِصْفَيْنِ. بُرْهانُهُ: لأنّ الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ د مِثْلُ قائِمَتَيْنِ ونِسْبَةُ نَظيرِ ا؟ب إلَى نَظيرِ ا؟د كَنِسْبَةِ نَظيرِ ب؟ج إلَى نَظيرِ [ب][5] ج؟د وَلَيْسَتِ الزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ ب إذا جُمِعَتا بِمُساوِيَتَيْنِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ، فزاوِيَةُ ا؟ب؟د مِثْلُ زاوِيَةِ د؟ب؟ج. وأيْضاً فَلْتَكُنِ الزاوِيَةُ الّتي تَلي زاوِيَةَ د؟ب؟ج مِنْ مُثَلَّثِ د؟ب؟ج مَقْسومَةً بِنِصْفَيْنِ بقَوْسِ ا؟ب. فَأقولُ: إنّ نِسْبَةَ نَظيرِ قَوْسِ د؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ د؟ا إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ج، وعَكْسُ ذَلِكَ أيْضاً. بُرْهانُهُ: لأنّ زاوِيَةَ ا مُشْتَرَكَةٌ لِمُثَلّثَيْ ا؟ب؟د ا؟ب؟ج وَزاوِيَتا د؟ب؟ا ج؟ب؟ا مَجْموعَتانِ مُساوِيَتانِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ، فتَكونُ لِذَلِكَ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ د؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ د؟ا إلَى نَظيرِ قَوْسِ د؟ج. وأمّا عَكْسُ ذَلِكَ فَبَيِّنٌ. وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ.

١. تليها : تتلوها؛ ٢. نسبتي : نسبتا؛ ٣. الى: كلمة زائدة ينبغي حذفها؛ ٤. وُضعت إشارة فوق كلمة "كنسبة" وكُتب على الهامش : وتبيّن هذا في الشكل الحادي عشر من هذا الفصل وفيه تبيّن عكسه؛ ٥. با : حرف زائد ينبغي حذفه؛

logue de l'arc *AD* est égal alors au rapport de l'homologue de l'arc BC à l'homologue de l'arc *CD* ; si on permute, ils seront également proportionnels.

Si le rapport de l'homologue de l'arc *AB* à l'homologue de l'arc *BC* est égal au rapport de l'homologue de l'arc *AD* à l'homologue de l'arc *DC*, je dis que l'arc *BD* divise l'angle *ABC* en deux moitiés.

Démonstration (voir la Fig. h7) : puisque la somme des deux angles qui sont en *D* est égale à deux angles droits et le rapport de l'homologue de *AB* à l'homologue de *AD* est égal au rapport de l'homologue de *BC* à l'homologue de *CD*, et la somme de deux angles qui sont en *B* n'est pas égale à deux droits, l'angle *ABD* est égal donc à l'angle *DBC*.

Que l'angle qui succède à l'angle *DBC*, dans le triangle *DBC*, soit également divisé en deux moitiés par l'arc *AB*. (Voir la Fig. h7a)

Je dis que le rapport de l'homologue de l'arc *DB* à l'homologue de l'arc *BC* est égal au rapport de l'homologue de l'arc *DA* à l'homologue de l'arc *AC* et réciproquement aussi.

Démonstration (voir la Fig. h7a) : puisque l'angle *A* est commun aux deux triangles *ABD* et *ABC* et que la somme des deux angles *DBA* et *CBA* est égale à deux angles droits, le rapport de l'homologue de l'arc *DB* à l'homologue de l'arc *BC* est égal alors au rapport de l'homologue de l'arc *DA* à l'homologue de l'arc *DC*. La réciproque est évidente. C'est ce que nous voulions montrer.

IV. PROPOSITION III. 5 DE MÉNÉLAÜS

Énoncé :

Soient ABC et DEG deux triangles sphériques de côtés respectifs : *a = arc(BC), b = arc(AC), c = arc(AB) et d = arc(EG), e = arc(DG), g = arc(DE).*

Si les triangles considérés vérifient les conditions :

1) *angle(A) = angle(D) = drt,*
2) *angle(C) = angle(G) < drt,*
3) chacun de deux côtés *b = arc(AC)* et *e = arc(DG),* est plus petit qu'un quart d'une circonférence de grand cercle de la sphère,

alors l'égalité (1) est satisfaite.

$$(1) \qquad \frac{Sin(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CA})}{Sin(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{CA})}=\frac{Sin(\overset{\frown}{EG}+\overset{\frown}{GD})}{Sin(\overset{\frown}{EG}-\overset{\frown}{GD})}.$$

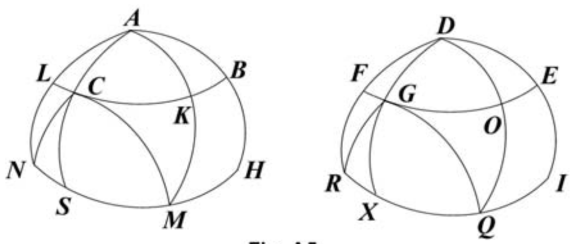


Fig. A5

Analyse

Explicitons tout d'abord le sens « trigonométrique » de l'égalité (1)[48] :

Nous avons :

[48] L'hypothèse entraine que l'angle *B* est aigu, mais l'angle *C* est également aigu ; par suite *a > b et a > c* ; de même les angles *E* et *G* sont aigus, par suite *d > e* et *d > g;* en effet, si par exemple l'angle *B* n'était pas aigu, l'arc de grand cercle qui est perpendiculaire en *B* à *arc*(*AB)*, devrait couper *arc*(*AC*) en un point *C'* de telle manière que *arc*(*AC*) soit plus grand ou égal à *arc*(*AC'*) qui est égal à un quadrant de grande circonférence ; ce qui contredit l'hypothèse.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{Sin(a+b)}{Sin(a-b)} = \frac{Sin(d+e)}{Sin(d-e)} \Leftrightarrow \frac{\frac{tg\ a}{tg\ b}+1}{\frac{tg\ a}{tg\ b}-1} = \frac{\frac{tg\ d}{tg\ e}+1}{\frac{tg\ d}{tg\ e}-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{tg\ a}{tg\ b} = \frac{tg\ d}{tg\ e}.$$

Concrètement, nous obtenons

$$\frac{tg\ a}{tg\ b} = \frac{tg\ d}{tg\ e} = \frac{1}{cos(angle(C))}.$$

C.-à-d.

$$ctg\ a = ctg\ b\ .\ cos\ (angle(C)).$$

La démonstration de Ménélaüs se développe de la manière suivante (voir la Fig. A5) : il construit sur la circonférence de grand cercle portant l'arc *CB*, les deux points *K* et *L* de sorte que

$$arc(CL) = arc(CK) = arc(CA).$$

Par analogie, pour le deuxième triangle, il construit les deux points *O* et *F* sur la circonférence de grand cercle portant l'arc *GE* de sorte que

$$arc(GF) = arc(GO) = arc(GD).$$

La forme de l'égalité à démontrer (1), devient alors :

$$\frac{Sin\,\overset{\frown}{LB}}{Sin\,\overset{\frown}{KB}} = \frac{Sin\,\overset{\frown}{FE}}{Sin\,\overset{\frown}{OE}}$$

Ménélaüs considère ensuite la circonférence de grand cercle décrit autour du point *C* choisi comme pôle.

Il suppose que les prolongements de *arc(AL), arc(AC), arc(AK)* et *arc(AB)* coupent cette circonférence, respectivement aux points *N, S, M* et *H*. Le point *H* est alors le pôle de *arc(ACS)*, car *angle(ASH)* et *angle(HAS)* sont des angles droits.

Il joigne *arc(CM)* et *arc(CN)*; chacun de ces deux arcs est un quadrant. Alors *angle(KCM)* est égal à *angle(MCS)*[49] et *angle(LCN)* est égal à *angle(NCS)*. Par analogie, pour l'autre figure duale, *angle(EGQ)* est égal à *angle(QGX)* et *angle(FGR)* est égal à *angle(RGX)*. D'autre part, *angle(MCS)* est égal à *angle(QGX)* et *angle(NCS)* est égal à *angle(RGX)*, car *angle(C)* est égal à *angle(G)*.

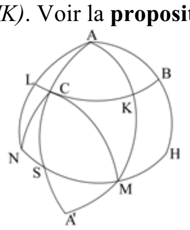
Mais puisque les points *C* et *G* sont les pôles respectifs de *arc(NH)* et *arc(RI),* nous avons *arc(MS)* est égal à *arc(XQ)* et *arc(NS)* est égal à *arc(RX)*; donc *arc(MH)* est égal à *arc(QI)*.

Ensuite Ménélaüs introduit, sans justification, la propriété de rapport anharmonique de quatre circonférences de grands cercles qui passent par le point *A* de la surface sphérique.

Dans le cas considéré, ces circonférences sont celles qui portent *arc(AN), arc(AS), arc(AM)* et *arc(AH)* et qui coupent les circonférences portant *arc(LB)* et *arc(NH)*. L'invariance du rapport anharmonique s'exprime alors sous la forme :

---

[49] En effet. Soit *A'* le point d'intersection de *arc(ACS)* et *arc(AKM)*, qui est le point diamétralement opposé à *A*. Dans le triangle *CKA'*, la somme *arc(KC)* + *arc(CA')* est égale alors à une demi-circonférence de grand cercle (car *arc(CK)* = *arc(CA)*), *arc(CK)* est plus petit qu'un quadrant et *arc(CM)* et un quadrant; donc *angle(KCM)* = *angle(MCS)* et *arc(A'M)* = *arc(MK)*. Voir la **proposition I. 29,** dans [Ibn 'Irāq, MSb, folios 13^{v}-14^{r}]:



Proposition I. 29 : Si la somme de deux cotés d'une figure trilatère est égale à une demi-circonférence de <grand> cercle, alors l'arc <de grand cercle> qui divise en deux moitiés l'angle entouré par les deux côtés, divise également la base en deux moitiés et il est un quadrant ; et si un arc <de grand cercle> relie le milieu de la base au sommet du triangle, il divise cet angle-là en deux moitiés et il est un quadrant.

"**الشَكْلُ التاسِعُ والعِشْرون** : إذا كانَ ضِلْعانِ مِنْ شَكْلٍ ذي ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، إذا جُمِعا، مُساوِيَيْنِ لِنِصْفِ دائِرَةٍ، فإنّ القَوْسَ الَّتي تَقْسِمُ /[**14و**] الزاوِيَةَ الَّتي يُحيطُ بِها الضِلْعانِ بِنِصْفَيْنِ، هِيَ تَقْسِمُ القاعِدَةَ أيْضاً بِنِصْفَيْنِ، وَهِيَ رُبْعُ دائِرَةٍ. وإذا وُصِلَتْ قَوْسٌ فيما بَيْنَ نُقْطَةِ النِصْفِ مِنَ القاعِدَةِ وَبَيْنَ نُقْطَةِ رَأسِ المُثَلَّثِ، فإنّها تَقْسِمُ تِلْكَ الزاوِيَةَ بِنِصْفَيْنِ وَهِيَ رُبْعٌ."

$$(2)\quad \frac{\sin \overset{\frown}{LB}}{\sin \overset{\frown}{KB}}\,\frac{\sin \overset{\frown}{CK}}{\sin \overset{\frown}{LC}} = \frac{\sin \overset{\frown}{NH}}{\sin \overset{\frown}{MH}}\,\frac{\sin \overset{\frown}{SM}}{\sin \overset{\frown}{NS}}\,.$$

En utilisant l'identité

$$\frac{\sin \overset{\frown}{LB}}{\sin \overset{\frown}{KB}} = \frac{\sin \overset{\frown}{LB}}{\sin \overset{\frown}{CL}}\,\frac{\sin \overset{\frown}{CL}}{\sin \overset{\frown}{CK}}\,\frac{\sin \overset{\frown}{CK}}{\sin \overset{\frown}{KB}}$$

et l'égalité *arc(CL) = arc(CK),* Ménélaüs trouve la relation

$$\frac{\sin \overset{\frown}{LB}}{\sin \overset{\frown}{KB}} = \frac{\sin \overset{\frown}{LB}}{\sin \overset{\frown}{CL}}\,\frac{\sin \overset{\frown}{CK}}{\sin \overset{\frown}{KB}}$$

et d'après la proportion (2), il déduit l'égalité

$$\frac{\sin \overset{\frown}{LB}}{\sin \overset{\frown}{KB}} = \frac{\sin \overset{\frown}{NH}}{\sin \overset{\frown}{NS}}\,\frac{\sin \overset{\frown}{MS}}{\sin \overset{\frown}{MH}}\,.$$

De la même manière, il obtient pour la figure duale l'égalité

$$\frac{\sin \overset{\frown}{FE}}{\sin \overset{\frown}{EO}} = \frac{\sin \overset{\frown}{IR}}{\sin \overset{\frown}{RX}}\,\frac{\sin \overset{\frown}{QX}}{\sin \overset{\frown}{QI}}\,.$$

Mais

arc(MH) = sin(QI), *arc(MS) = arc(QX)* et *arc(NS) = arc(RX)*.

Par suite

$$\frac{hom(BA)}{hom(AD)} = \frac{hom(BC)}{hom(CD)}\,.$$

C.Q.F.D.

Ibn ʻIrāq a écrit à propos de la démonstration de Ménélaüs :

> Ménélaüs était vague dans la démonstration de cette proposition : soit il en avait voulu mettre le lecteur de son livre en face d'une difficulté[50], soit il

[50] Le mot douteux du texte manuscrit arabe (voir : [Ibn ʻIrāq, MSb, folio 37^r, *l.* 10, cinquième mot] et [Ibn ʻIrāq 1998, p. 69 (*l.* 24, onzième mot)]) doit se lire «إعنات», c.-à-d. : « *Mettre quelqu'un intentionnellement en face de confusion,*

avait disposé de tout ce qu'il a eu besoin pour accomplir la démonstration qui lui paraîtrait claire d'un bref coup d'œil. (voir [Ibn 'Irāq, MSb, folio 37r, *l.* 9-12] et [Ibn 'Irāq 1998, p 69 (*l.* 24), p. 70 (*l.* 1-2)])

"فَقَد أبهَمَ مانالاوس بُرْهانَ هذا الشَكْلِ، إمّا لأنّه أحَبَّ "**إعْناتَ**" الناظِرِ في كِتابِهِ أو كان عِنْدَهُ سائرُ ما يُحْتاجُ إلَيْهِ في إتمامِ البُرْهانِ، يُدْرَكُ بِأدْنَى نَظَرٍ."

---

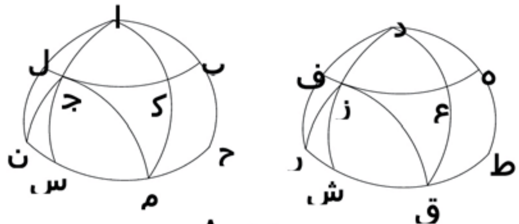
en lui posant une question de réponse difficile et ambiguë ». Ce mot s'utilise également comme terme médical : « *ostéoclasie* ». Il semble que Krause ait lu ce mot fautivement «**إعْتاب**», c.-à-d. : « *Acceptation de la part de blâmé, de ce qui satisfait le blâmant ; sentir la culpabilité.* » Voir [Ibn Manzur 2003, vol. 10, p. 22, 294], où l'on trouve l'explication suivante :

أعْنَتَهُ: سَأَلَهُ عَنْ شَيْءٍ أرادَ بِهِ اللَّبْسَ عَلَيْهِ وَالمَشَقّةَ ؛

La racine du mot «**إعْنات**» est un verbe « أعْنَتَ » qui signifie : « poser à quelqu'un une question à propos de quelque chose qui vise à le mettre en état de confusion et de difficulté »

الإعْتاب: هُوَ رُجوعُ المَعْتوبِ عَلَيْهِ إلى ما يُرْضي العاتِبَ.

Proposition III.5 ([Ibn ‘Irāq, MSb, folios 36r-37v], [Ibn ‘Irāq 1998, p. 68-69] (Voir la Fig. A5).



م‌سر٨

"الشَكْلُ الخامِسُ[١]**، (رسم ٨)**

إذا كانَ شَكْلانِ ذَوا[٢] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ وكانَتْ زاوِيَتانِ مِنَ زَواياهُما الّتي[٣] عَلَى قاعِدَتَيْهِما[٤] مُتَساوِيَتَيْنِ حادَّتَيْنِ وكانَتْ زاوِيَتانِ مِنَ الزَوايا الباقِيَةِ مِنْهُما قائِمَتَيْنِ[٥] وكانَ كُلُّ واحِدٍ[٦] مِنْ ضِلْعَيْهِما[٧] اللّذَيْنِ[٨] يُوَتِّرانِ زاوِيَتَيْهِما[٩] الباقِيَتَيْنِ أقَلَّ مِنْ رُبْعِ دائِرَةٍ فَإنَّ نِسْبَةَ جَيْبِ القَوْسَينِ الـمُحيطَتَيْنِ[١٠] بِالزاوِيَةِ الحادَّةِ الـمُساوِيَةِ مِنْ أحَدِ الشَكْلَيْنِ مَجْموعَتَيْنِ إلَى جَيْبِ فَضْلِ ما بَيْنَهُما كنِسْبَةَ جَيْبِ /[**٣٦ظ**] القَوْسَيْنِ الـمُحيطَتَيْنِ[١١] بِالزاوِيَةِ الحادَّةِ الـمُساوِيَةِ مِنَ الشَكْلِ الآخَرِ <مَجْموعَتَيْنِ> إلَى جَيْبِ فَضْلِ ما بَيْنَهُما. فَلْيُكُنْ شَكْلانِ ذَوا[١٢] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ عَلَيْهُما ا؟ب؟ج د؟ه؟ز وَلْتَكُنِ الزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ا د قائِمَتَيْنِ، والزاوِيَتانِ اللّتانِ عند نُقْطَتي ج ز مُتَساوِيَتَيْنِ حادّتَيْنِ، وَلْيَكُنْ كُلُّ واحِدَةٍ مِنْ قَوْسَيْ ج؟ا د؟ز أَقَلَّ مِنْ رُبْعِ دائِرَة. فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ جَيْبِ قَوْسَيْ ب؟ج ج؟ا مَجْموعَتَيْنِ إلَى جَيْبِ فَضْلِ ما بَيْنَ <ب؟ج ج؟ا كنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسَيْ ه؟ز ز؟د مَجْموعَتَيْنِ إلَى جَيْبِ فَضْلِ ما بَيْنَ قَوْسَيْ> ه؟ز ز؟د. لأنّا نُخْرِجُ قَوْسَ ب؟ج <إلَى ل> وَنَجْعَلُ كُلَّ واحِدَةٍ مِنْ قَوْسَيِ ج؟ك ج؟ل مُساوِيَةً لقَوْسِ ا؟ج ونُخرج قَوْسَيْ ا؟ك ا؟ل وَنَجْعَلُ نُقْطَةَ ج قُطْباً وَنَخُطُّ عَلَيْهِ قَوْساً مِنْ دائِرَةٍ عَظيمَةٍ عَلَيْها ح م س<ن> فَيَكونُ نُقْطَةُ ح أيْضاً قُطْباً لِقَوْسِ ا؟ج؟س وذَلِكَ أنّ كُلَّ واحِدَةٍ مِنْ قَوْسَيْ ا؟ح ح؟س قائِمَةٌ عَلَى ا؟س عَلَى زَوايا قائِمَةٍ فَنُخْرِجُ قَوْسَيْ ج؟م ج؟ن فَلأنّ قَوْسَ ا؟ج مُساوِيَةٌ لِقَوْسِ

Si parmi les angles aux deux bases de deux figures trilatères, deux angles <respectifs> sont aigus et égaux et deux autres sont droits ; et si chacun des deux côtés qui sous-tendent les deux angles restants dans les deux figures, est plus petit qu’un quadrant de <grand> cercle, alors le rapport du Sinus de la somme de deux arcs entourant l’angle aigu égal de l’une de deux figures, au Sinus de leur différence, est comme le rapport du Sinus /[**36**v] de la somme de deux arcs entourant l’angle aigu égal de l’autre figure, au Sinus de leur différence.

Que les deux figures trilatères soient ABC et *DEG*, que les deux angles aux deux points *A* et *D* soient droits, que les angles aux deux points *C* et *G* soient aigus et égaux, et que chacun des deux arcs *CA* et *DG* soit plus petit qu’un quadrant.

Je dis que le rapport du Sinus de la somme des deux arcs *BC* et *CA* au Sinus de la différence entre *BC* et *CA* est comme le rapport du Sinus de la somme des deux arcs *EG* et *GD* au Sinus de la différence entre *EG* et *GD*. En effet, on prolonge l’arc *BC* jusqu’à L, on pose chacun des deux arcs *CK* et *CL* égal à l’arc *AC* ; on mène les deux arcs *AK* et *AL* et on décrit autour du point *C*, choisi comme pôle, un arc *HMSN* de grand cercle. Le point H est alors un pôle de l'arc *ACS*, car chacun des deux arcs *AH* et *HS* est perpendiculaire à <l'arc> *AS*. On mène les deux arcs *CM* et *CN*. Puisque l'arc *AC* est égal à l'arc *CK* et que l'arc *AC* n'est pas un quadrant de <grand> cercle alors que arc *CM* est un quadrant de <grand> cercle, l'angle *KCM* est égal à l'angle *MCS*. De la même manière on montre aussi que l'angle *LCN* est égal à l'angle *NCS*.

On mène aussi l'arc *EGF* et on pose chacun des deux arcs *GF* et *GO* égal à l'arc *DG* ; on trace les deux arcs *DO* et *DF*. On décrit autour du point *G* choisi comme pôle, l'arc *IQXR* de grand cercle ; et comme précédemment, on montre que la ligne *GQ* divise aussi l'angle *EGX* en deux moitiés et que la ligne *RG* divise l'angle *FGX* en deux moitiés. L'angle *MCS* est égal donc à l'angle *QGX* et l'angle *NCS* est égal à l'angle *RGX*. Les deux points *C* et *G* sont deux pôles <respectifs> de deux arcs *HMSN* et *IQXR*, donc l'arc *MS* est égal à l'arc *QX* et l'arc *NS* est égal à l'arc *RX*. Par suite, l'arc *MH* est égal à l'arc *IQ*. Puisque les arcs *AH*, *AM*, *AS* et *AN* sont menés du point A au deux arcs *BCL* et *HSN*, le rapport du Sinus de l'arc *LB* au Sinus de l'arc *BK* est composé du rapport du Sinus de l'arc *BL* au Sinus de l'arc *LC* et du rapport du Sinus de l'arc *LC* au Sinus de l'arc *CK* et du rapport du Sinus de l'arc *CK* au Sinus de l'arc *KB*. Ce rapport est comme le rapport composé du rapport du Sinus de l'arc *BL* au Sinus de l'arc LC et du rapport du Sinus de l'arc *CK* au Sinus de l'arc *KB*, car l'arc *CL* est égal à l'arc *CK*. /[**37r**][51] Mais ce rapport est comme le rapport composé du rapport du Sinus de l'arc *NH* au Sinus de l'arc *NS* et du rapport du Sinus de l'arc *MS* au

جـ؟ك وَلَيْسَ قَوْسُ ا؟جـ بمُساوِيَةٍ لِرُبْعِ دائِرَةٍ وأنّ قَوْسَ جـ؟م رُبْعُ دائِرَةٍ يَكونُ زاوِيَةُ ك؟جـ؟م مُساوِيَةً لزاوِيَةِ م؟جـ؟س وَكَذَلِكَ أَيْضاً نُبَيِّنُ أنّ زاوِيَةَ ل؟جـ؟ن مُساوِيَةٌ لزاوِيَةِ ن؟جـ؟س. وأيْضاً فَإنّا نُخْرِجُ قَوْسَ هـ؟ز؟ف وَنَجْعَلُ كُلَّ واحِدَةٍ مِنْ قَوْسَيْ ز؟ف ز؟ع مُساوِيَةً لقَوْسِ د؟ز ونُخْرِجُ قَوْسَيْ د؟ع د؟ف وَنَجْعَلُ نُقْطَةَ[١٣] ز قُطْباً وَنَخُطُّ عَلَيْهِ قَوْساً مِنْ دائِرَةٍ عَظيمَةٍ عَلَيْها ط ق ش ر وَنُبَيِّنُ كَما بَيَّنّا[١٤] آنِفاً أنّ خَطَّ ز؟ق أيْضاً يَقْسِمُ زاوِيَةَ ع؟ز؟ش[١٥] بِنِصْفَيْنِ وأنّ خَطَّ ر؟ز يَقْسِمُ زاوِيَةَ ف؟ز؟ش بِنِصْفَيْنِ فَيَكونُ زاوِيَةُ م؟جـ؟س[١٦] مُساوِيَةً لزاوِيَةِ ق؟ز؟ش وَيَكونُ زاوِيَةُ نجـ؟س[١٧] مُساوِيَةً لِزاوِيَة ر؟ز؟ش ونُقْطَتا جـ ز قُطْبا قَوْسَيْ ح؟م؟س؟ن ط؟ق؟ش؟ر[١٨] فَيَكونُ قَوْسُ م؟س مُساوِيَةً لقَوْسِ ق؟ش وقَوْسُ ن؟س مُساوِيَةً لقَوْسِ ر؟ش وَيَكونُ لذَلِكَ قَوْسُ م؟ح مُساوِيَةً لقَوْسِ ط؟ق. ولأنّه قد خرج مِنْ نُقْطَةِ ا إلَى قَوْسَيْ ب؟جـ؟ل ح؟س؟ن قِسِيُّ ا؟ح ا؟م ا؟س ا؟ن يَكونُ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ل؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ك مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ل إلَى جَيْبِ قَوْسِ ل؟جـ وَمِنْ نِسْبَة جَيْبِ قَوْسِ ل؟جـ إلَى جَيْبِ قَوْسِ جـ؟ك وَمِنْ نِسْبَة جَيْبِ قَوْسِ جـ؟ك إلَى جَيْبِ قَوْسِ ك؟ب وَهَذِهِ النِسْبَةُ هِيَ مِثْلُ النِسْبَةِ الـمُؤَلَّفَةِ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ل إلَى جَيْبِ قَوْسِ ل؟جـ وَمِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ جـ؟ك إلَى جَيْبِ قَوْسِ ك؟ب وذَلِكَ أنّ قَوْسَ جـ؟ل مُساوِيَةٌ لقَوْسِ جـ؟ك [وهَذِهِ /[**٣٧و**] النِسْبَةُ هِيَ مِثْلُ النِسْبَةِ الـمُؤَلَّفَةِ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ل إلَى جَيْبِ قَوْسِ ل؟جـ وَمِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ جـ؟ك إلَى جَيْبِ قَوْسِ ك؟ب وذَلِكَ أنّ قَوْسَ جـ؟ل مُساوِيَةٌ لقَوْسِ جـ؟ك][١٩] وهَذِهِ النِسْبَةُ هِيَ مِثْلُ النِسْبَةِ الـمُؤَلَّفَةِ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ن؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ن؟س وَمِنْ نِسْبَة جَيْبِ قَوْسِ م؟س إلَى جَيْبِ قَوْسِ م؟ح وكذَلِكَ أيْضاً نُبَيِّنُ أنّ نِسْبَةَ جَيْبِ قَوْسِ ف؟هـ إلَى جَيْبِ قَوْسِ هـ؟ع مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ط؟ر إلَى جَيْبِ قَوْسِ رش وَمِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ق؟ش إلَى جَيْبِ قَوْسِ ط؟ق وَقَدْ تَبَيَّنَ أنّ قِسِيَّ ح؟م <م؟س> ن؟س مُساوِيَةٌ لِقِسِيِّ ط؟ق ق؟ش ش؟ر فَيَكونُ لِذَلِكَ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ل؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ك؟ب

[51] Le texte manuscrit contient ici une longue phrase répétée [Ibn 'Irāq, MSb, entre le dernier mot du folio 36^{r} et le dernier mot de la ligne 2 (folio 37^{v})].

Sinus de l’arc *MH*. On montre également que le rapport de Sinus de l’arc *FE* au Sinus de l’arc *EO* est composé du rapport du Sinus de l’arc *IR* au Sinus de l’arc *RX* et du rapport du Sinus de l’arc *QX* au Sinus de l’arc *IQ*. Mais on a montré que les arcs *HM*, <*MS*> et *NS* sont respectivement égaux aux arcs *IQ*, *QX* et *XR*. Par suite, le rapport du Sinus de l’arc *LB* au Sinus de l’arc *KB* est comme le rapport du Sinus de l’arc *FE* au Sinus de l’arc *EO*. C’est ce que nous voulions montrer. »

كنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ف؟ه إلَى جَيْبِ قَوْسِ ه؟ع، <وذَلِكَ ما أردنا أن نبيّن.>"

. مخطوطة ليدن، شرقي 930، ص 36 و 37 ظ. ٢. ذوا: ذو؛ ٣. الّتي: اللتي؛ ٤. قاعدتيهما: قاعدتهما؛ ٥. قائمتَيْنِ:قائمة؛ ٦. واحد: واحدة؛ ٧. ضِلْعَيْهِما: نقطتا حرف الياء مطموستان؛ ٨. اللّذين: اللذان؛ ٩. زاوِيَتَيْهِما: نقاط حرفي الياء والتاء مطموسة؛ ١٠. الـمُحيطتَيْنِ : المحطين؛ ١١. الـمُحيطتَيْنِ: المحطين؛ ١٢. ذوا:ذو؛ ١٣. نقطة: نقط؛ ١٤. بيّنّا: بيننا؛ ١٥. ع؟ز؟ش: ه؟ز؟ش؛ ١٦. م؟ج؟س: ل؟ج؟س؛ ١٧. ن؟ج؟س:ب؟ج؟س؛ ١٨. ط؟ق؟ش؟ر: ط؟ق؟ش؟ج؛ ١٩. جملة مكرّرة.

BIBLIOGRAPHIE

Sources manuscrites

IBN HUD, Yūsuf al-Mu'taman, Roi de Saragosse, [XI^e S.] *Kitāb al-Istikmāl* (*Le Livre de Complétion* (*Perfection*). MS Or. 82 de la Bibliothèque Royale de Copenhague.

MS d'IBN 'IRĀQ, Abū Nasr Mansūr, [XI^e S.a] *Maqāla fī islāh shakl min Kitāb Manālā'ūs fī-l Kurīyyāt (Article sur la rectification d'une proposition du livre des Sphériques de Ménélaüs).* Patna, MS 2468, folios 75^r-78^v.

— [XI^e S.b] *Islāh Kitāb Manālā'ūs fī-l Kurīyyāt (Rectification du livre des Sphériques de Ménélaüs)*, Leiden, MS Or 930.

Sources imprimées

AL-ANDALUSĪ Sā'id, *Ṭabaqāt al-umam* (*Les Classes des nations*), éd. Bū'alwān, Beyrouth, 1985.

AL-HOUJAIRI, M., *L'Encyclopédie d'Ibn Hūd*, thèse doctorale (Univ. Paris 7, 2005), vol. I et II.

AL-QIFTI, Jamāl al-Dīn, *Ta'rikh al-hukama'* (*Histoire des sages*), éd. Julius Lippert, Leipzig, 1908.

AL-TUSI, Nasīr al-Dīn, *Traité du Quadrilatère (Kitāb al-Shakl al-qattā')*. Livre attribué à Nasīr al-Dīn al-Tūsī, traduit (en français) par Alexandre Pacha Caratheodory, Constantinople, 1891 ; réimpr. F. Sezgin, coll. *Islamic Mathematics and Astronomy*, vol. 47, Frankfurt, 1998.

BELLOSTA, Hélène, Le Traité de Thābit ibn Qurra sur *la figure secteur*, *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 14 , n° 1, 2004, p. 145-168. Cet article a été repris et augmenté dans : *Thābit ibn Qurra – Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdâd*, R. Rashed (éd.), Berlin, 2009, p. 335-390.

CROZET, Pascal, Thābit ibn Qurra et la composition des rapports, *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 14, n° 2, 2004, p. 175-211. Cet article a été repris et augmenté par l'édition et la traduction du texte, dans : *Thābit ibn Qurra – Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*, R. Rashed (éd.), Berlin, 2009, p. 391-535.

DEBARNOT, Marie-Thérèse, Al-Bīrūnī, Kitāb Maqālīd 'ilm al-hay'a, *La Trigonométrie sphérique chez les Arabes de l'Est à la fin du X^e siècle*, édition et traduction par M.-Th. Debarnot (Damas, 1985).

—"Trigonometria", dans *Storia della* Scienza, vol. III, Istituto della Enciclopedia Italiana (Rome, 2002), p. 432-447.

DJEBBAR, Ahmed, « *La rédaction de l'Istikmāl d'al-Mu'taman (XIe s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIII^e-XIV^e siècles* », Historia Mathematica, vol. 24, 1997, p. 185-192.

EUCLIDE, *Les Éléments d'Euclide*. Traduction française dans le livre "*Les Œuvres d'Euclide*", F. Peyrard, Paris 1819 ; nouveau tirage. Paris 1993.

HOGENDIJK, Jan, "The Geometrical Parts of the *Istikmāl* of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century). An Analytical Table of Contents", *Archives internationales d'histoire des sciences*, 41, (1991), p. 207-281.

IBN AL-ABBĀR, Muhammad, *al-Hulla al-saiyrā'* (*Le Costume en soie*), éd. Hussain Monés (Le Caire, 1963), vol. II.

IBN 'IRĀQ, *Abū Nasr Mansūr, Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Nasr Mansūr B. 'Alī B. 'Irāq*. Max Krause, coll. Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, *Philologish-Historische Klasse*, 3e série, n° 17, Berlin, 1936 ; réimpr. F. Sezgin, coll. *Islamic Mathematics and Astronomy*, vol. 37, Frankfurt, 1998.

IBN MANZŪR, *Abū al-Fadl Jamāl al-Dīn Muhammad*, *Lisān al-'Arab (*nouvelle version*).* Dar Sader Publishers, Beirut, 2000-2003.

RASHED, Roshdi et AL-HOUJAIRI, Mohamad, Sur un théorème de géométrie sphérique : Théodose, Ménélaüs, Ibn 'Irāq et Ibn Hūd, *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 20, n° 2 (2010), p. 207-253.

RASHED, Roshdi, *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. I, Londres, 1996.

— *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. V, Londres, 2006.

SAMSO, Julio, *Estudios sobre Abū Nasr Mansūr b. 'Alī b. 'Irāq*. Barcelona, 1969.

THEODOSE, *Les Sphériques* de Théodose de Tripoli. Trad. Paul Ver Eecke, Paris, 1959.

WITKAM, Jan Just, *De egyptische Arts Ibn al-Akfāni*, (Leiden, 1989).

EMERGENCE OF GEOMETRY AND CONCEPTUAL CHANGES IN THEORY OF RATIOS IN THEORETICAL MUSIC IN THE 16TH CENTURY

Oscar João ABDOUNUR
Instituto de Matemática
Universidade de São Paulo, Brazil

ABSTRACT — The end of the 15th and the beginning of the 16th century witnessed intense structural changes in the conceptions underlying ratios and proportions as well as a significant extension in the spectrum of techniques used in theoretical music. In this context, changes in the conception of ratio brought about the strengthening of the arithmetization of theories of ratio and also the use of geometry as an instrument for solving structural problems in theoretical music. The sixteenth century represented thus a major revolution in the production of treatises on theoretical music and saw, in distinction to the Pythagorean tradition, the introduction of geometry as a tool not only to solve problems such as the division of the tone but also to solve theoretical problems related to the systematization of the temperament, symbolizing a substantial conceptual change in the mathematical foundations of theoretical music and eventually in the theory of ratios.

The experiment of Pythagoras: compounding ratios

Mathematics and music were already linked in Antiquity. In the so-called experiment of the monochord, Pythagoras is credited with having established the correspondence between musical intervals and ratios of a string, discovering that certain intervals could be produced by dividing the string in simple ratios *a:b* such that *b* represented the whole string whereas *a* represented a part of the string. In particular, the intervals of the octave, fifth and fourth were produced by simple ratios 1:2; 2:3 and 3:4, respectively. These intervals were called perfect consonances, and the Pythagorean consonances consisted strictly of the intervals whose underlying ratios were formed only by the small numbers 1,2,3 and 4 – the *Tetraktys*.

Inquiries related to the interrelationships between Greek music and the development of pure mathematics were already conducted in the beginning of the 20th century by P. Tannery (Tannery, 1915) and in the seventies by Szabo, who also raised similar questions in the attempt to show that pre-Eudoxan theory of proportions developed initially as an inheritance from the Pythagorean theory of music (Szabo, 1978). In the latter, some indicators of such an inheritance are found in connection with issues such as Euclid's constraint on the operation of *compounding ratios* implied yet not explicitly defined, for instance, in proposition 23, Book VI (Heath, 1956, 247).

Equal division of the tone and theories of ratios underlying music theory

In the context of the discussions on musical theory having ratios as their basis, the problem of the equal and proportional numerical division of the whole tone interval sounding between strings with the length ratio of 9:8 occupied the minds of the theorists from Antiquity up to Renaissance. It would play an important part in the historical process that led to the emergence of equal temperament. Attempts to divide the tone were already made in Antiquity, for instance by Aristoxenus (fourth century B.C.), who conceived the theoretical nature of music as essentially geometric, understanding pitches, musical intervals and also distance as unidimensional magnitudes – continuous quantities – that should follow the rules of the Euclidean geometry and should be capable of being divided continuously, which inevitably raises questions concerning the nature of ratio in this context. In contrast with the Pythagoreans, who defended the position that musical intervals could properly be measured and expressed only as mathematical ratios involving whole numbers, Aristoxenus rejected this position, asserting instead that the ear was the sole criterion of musical phenomena (Winnington-Ingram 1995, 592).

The problem of the division of the tone arose from the Pythagorean discovery of numerical indivisibility of a superparticular integer ratio (a ratio reducible to an expression of the type $(n+1)$:n) by its geometrical mean, in the case, the ratio 9:8. Given three integers $A < x < B$, where the ratio A:B is superparticular, x cannot be both an integer and at the same time fulfill the condition A:x=x:B, it means, it can not be the geometric mean between A and B. Mathematically, the equal division of the tone 8:9 provides incommensurable ratios underlying musical intervals, a result whose proof belongs to the body of Pythagorean knowledge.

In preferring geometry to arithmetic in solving problems involving relations between musical pitches, Aristoxenus sustained as mentioned before and also against the Pythagoreans, the possibility of dividing the tone into two equal parts, conceiving musical intervals – and indirectly ratios – as one-dimensional and continuous magnitudes. This idea provoked a large number of reactions expressed for instance in the *Sectio Canonis* (Barbera 1991, 125), which was in Antiquity attributed to Euclid and much later in the *De institutione musica* (Bower and Palisca 1989, 88) of Boethius in the early Middle Ages, which gave birth to a strong Pythagorean tradition in theoretical music throughout the Middle Ages. Following the Platonic-Pythagorean tradition, a great part of medieval musical theorists sustained the impossibility of the equal division of the tone, which would mathematically lead to incommensurable ratios underlying musical intervals. Gradually, the need to carry out the temperament gave birth to different attempts to divide the tone.

Goldman suggests that Nicholas Cusanus (1401-1464) seems to be the first to assert in *Idiota de Mente* that the musical half-tone is derived by *geometric division* of the whole-tone, and hence would be defined by an irrational number (Goldman, 1989, 308). As a consequence, Cusanus would be the first to formulate a concept that set the foundation for the equal temperament proposed in the work of the High Renaissance music theorists Faber Stapulensis (1455-1537) and Franchino Gafurius (1451-1524), published half a century later (Goldman, 1989, 308). Nevertheless, one can find in the Byzantine tradition Michael Psellus (1018-1078), who suggested in his *Liber de quatuor mathematicis scientijs, arithmetica, musica, geometria, [et] astronomia* (Psellus, 1556) a geometrical division of the tone, whose underlying conception implies an understanding of ratio as a continuous magnitude. Also concerning the division of the tone before Cusanus, Marchetus of Padua (1274 ? --?) proposed, in his *Lucidarium in Arte Musice Planae* written in 1317/1318, the division of the tone into five equal parts (Herlinger, 1981, 193), an innovation of extraordinary interest which made Marchettus the first in the Latin tradition to propose such a division, but without any mathematical approach.

In the context of recovery of the interest in ancient texts and of the use of geometry to solve problems in theoretical music at the end of the fifteenth century and the beginning of the sixteenth century, the Bohemian mathematician and music theorist Erasmus of Höritz emerged as one of the German humanists most articulate with musical matters. Erasmus went back to the Greek sources of the doctrines of Boethius, communicating to musical readers an important fruit of the revival of interest in ancient texts. He wrote his *Musica*, where he suggested in chapter seventeen a equal division of superparticular ratios (Erasmus Horicius, 1500?, fo. 66^v).

Erasmus stated that any part of any superparticular ratio could be obtained, in particular the half of 8:9, which corresponds to divide equally the whole tone. In chapter seventeen of his *Musica*, he established a numerical procedure which would lead to the geometrical mean between the terms of ratio 9:8 underlying the tone. He attempted to arrive to an expression of the ratio for the supposedly equally proportional halves of the whole tone interval using very large integers numbers. He did it first by constructing assured by proposition 18 of Book VII of the Elements, which asserts, that a:b :: am:bm. Following his method, the half of the 9:8 ratio of a tone could be obtained by the geometric mean of its expansion into the term 34828517376: 30958682112, which is nothing but (3869835264 x 9):(3869835264 x 8), that is, he applied proposition 18 mentioned above to a:b and m equal to 9:8 and 3869835264, respectively. In this case, since decimal fractions were not available at this time, he tried to get precision through large integer numbers rather than with places after decimal point, proposing an abstract numerical method for the given problem.

The Pythagorean-Euclidean proof of the indivisibility of a superparticular ratio is naturally irrefutable in the domain of rational number. Nevertheless, in his *musica*, Erasmus asserts that "... *in musical demonstrations we are forced to use all kinds of ratios… since not all shapes of consonances and also dissonances are founded in rational ratios and for that reason we must not neglect the ratios of surds…*" (Erasmus Horicius, 1500?, fo. 61^v). Erasmus proposed here nothing less than a consideration of incommensurable ratios in musical contexts. For music theoretical purposes, in order to make use of Eudoxus' theory of book V of Euclid's Elements on which theory of ratios of surds is based and which deals with abstract quantities with continuous nature, he established a link between continuous and discrete quantity. Erasmus realized that the sought for a geometrical mean to the ratio underlying the whole tone could not result in a rational number and instead of changing the domain at this point from discrete quantity of numbers to continuous quantity of geometrical lines, he proposed a number continuum, although not explicitly, creating a very dense discrete point space between the original terms 9 and 8 by their expansion, which also did not allow him to locate the precise mean. If he really thought that he was capable of dividing the sesquioctave ratio in terms of a purely numerical operation, he must have possessed an at least rudimentary concept of number continuum, an assumption which is corroborated in a passage later on in chapter seventeenth in which he seemed to refer directly to the idea of such a continuum mentioning Boethius as a prisoner of the Pythagorean doctrine of discrete integer number not having access to all ratios of numbers, which followed each other continuously in the manner of continuous quantities (Erasmus Horicius, 1500?, fo. 67^{v}).

Theoretically based on many geometrical propositions and, unusually, modeled on Euclidean style, his *Musica* dealt with ratio as a continuous quantity, announcing perhaps what would emerge as a geometric tradition in the treatment of ratios in theoretical music contexts during the sixteenth century. Interestingly, Erasmus could have easily solved the equal division of the tone making use of the proposition of Euclid's Elements which provide the geometrical mean through the high of a rectangle triangle. Nevertheless, he tried, although missing the concept of infinity, to make use of a numerical method to approach such a mean, which also indicates his consideration with Pythagorean conceptions in theoretical music contexts.

The change from an arithmetical to a geometrical basis in the theory of music represents a meaningful structural transformation in the basis of theoretical music, strongly tied to the change in the conception of western music mentioned before.

The discussions concerning the division of the tone and consequently underlying conceptions of ratios in music and mathematics contexts are naturally linked to the structures of theories of ratio in such contexts. Up to the Renaissance, the treatment of ratios had no clear and well-defined structure. Some of the traditions had mainly arithmetical features, others geometrical and musical ones, whereas still others incorporated both of these tendencies. Sylla discussed the confusion over the geometrical and the arithmetical traditions of ratios, showing how the two traditions in the context of compounding and multiplying were "strangely mingled" (Sylla, 1984). She categorizes two traditions within the Greek and medieval treatment of ratios, one associated with theoretical mathematics, with music, and with physics, particularly found in Bradwardine's *De proportionibus*; and the second associated with practical calculations using ratios and with astronomy (Sylla, 1984, 11). She argues that "These two traditions may not encompass all ancient and medieval concepts of ratio. Neither were these traditions always separate -- in fact, they were often strangely mingled. Nevertheless, they represent two poles of the ways in which ratios and the operations on ratios could be treated" (Sylla, 1984, 17). Such different structures, which had kept up with the concepts of ratio and proportion since Antiquity, shaped distinct theories for such concepts as underlay treatises of mathematics and of music up to the Renaissance.

The mathematical basis of Renaissance theoretical music: from arithmetic to geometry

The period from the end of the fifteenth century to the end of sixteenth century witnessed more intense structural changes in the conceptions underlying ratios and proportions in the contexts of theoretical music. With the need of equal temperament which brings together the need of the equal division of the whole tone and consequently structural changes in the conceptions of ratios, treatments with such concepts in theoretical music ceased to be a subject exclusively of arithmetic and became a subject of geometry.

In this context, Erasmus Horicius contributed immensely to the introduction of geometry as an instrument for solving structural problems in theoretical music. Notwithstanding the announcements of the need for geometry in theoretical music by previous authors, Erasmus could be considered the first in the Renaissance to apply Euclidean geometry extensively in his *Musica* (Erasmus Horicius, 1500?) for the resolution of structural problems in theoretical music. Relying mainly on books V and VI of Euclid, Horicius used geometry in different ways to solve musical problems, applying it to intervals, in contradiction to the Boethian arithmetical tradition. He used in his *Musica* the *denominatio* terminology taken from Campanus's Latin translation of *the Elements*, a procedure which also contributed to the emergence of ratio as a continuous quantity and consequently to an arithmetical theory of ratio in the context of theoretical music, together with the considerations mentioned before. Making use of geometrical resources hitherto unusual in musical contexts, Erasmus showed that the intervals of the fifth (3:2) and the whole tone could be divided through a proportional mean, namely by finding a magnitude b between a and c so that $a:b$ is proportional to $b:c$ considering the whole tone mathematically expressed by $a:b$, although such resources involved potentially irrational numbers. Erasmus represents an intensification in the conceptual change undergone by theoretical music at this time, and his contribution is relevant to the research on mathematics and music at the end of the fifteenth century and beginning of the sixteenth century at the University of Paris, inasmuch as one can find the use of geometry in the solution of musical problems, for instance in the geometric division of superparticular intervals presented in Faber Stapulensis's *Elementalia musica*, first published in 1494. This work had influence in the Spanish tradition of theoretical music in the sixteenth century, with authors like Pedro Ciruelo (1470-1548) and Juan Bermudo (1510-1565), who also presented respectively in the works *Cursus quatuor mathematicarum artium liberalium*, published in Alcalá de Henares in 1516 (Ciruelo, 1526) and *Declaración de Instrumentos,* published in 1555 in Osuna (Santiago Kastner,1957) the same division of the tone with the geometrical mean presented by Faber Stapulensis. In the Iberian Peninsula, the tendency to use geometry occurred also in Salinas's *De Musica* published in Salamanca in 1577, which contains a geometrical systematization for the equal Temperament that makes extensive use of Euclid's *Elements*.

Such a tendency spread also to the German and Italian production in theoretical music. For instance, the German mathematician Heinrich Schreiber (1492-1525) published in the appendix *Arithmetica applicirt oder gezogen auff die edel kunst Musica* of his "Ayn new kunstlich Buech…" of 1521 (Bywater, 1980) a geometric division of the tone into two equal parts making, use of the Euclidean method for finding the geometric mean. He also operated with ratios with a very arithmetical structure, for instance, compounding them as one, anachronistically, multiplies fractions.

In the Italian tradition the tendency to use geometry was also strong. A representative example of such a tendency is Gioseffo Zarlino, a leading Italian theorist and composer in the sixteenth century. One of the most important works in the history of music theory, Zarlino's *Le istitutioni harmoniche* (1558), represents an important attempt to unite speculative theory with the practice of composition on the grounds that "music considered in its ultimate perfection contains these two parts so closely joined that one cannot be separated from the other (Palisca, 1995, 646). The tendencies for reconciling theory and practice also manifested themselves in this period in the context of structural problems underlying theoretical music. Such a reconciliation seemed to be incompatible with a Pythagorean perspective on theoretical music, in which there was no place for geometry, an essential tool for modeling a new language claimed by practical music.

In this context, it is worthwhile to mention Zarlino's *Sopplimenti musicali* (1588), in which the Italian theorist demonstrated much greater penetration into the ancient authors, particularly Aristoxenus and Ptolemy, than in *Le istitutioni harmoniche* (Palisca, 1995, 648). In spite of the still existing authority of Pythagoreanism in the context of theoretical music in the sixteenth century, Zarlino's *Sopplimenti musicali* already gave evidence of the tension between speculative theory and practice in the contexts of structural problems in theoretical music, inasmuch as it presented geometrical solutions for the equal temperament but was also based on Pythagorean foundations.

Interestingly, in the last page of the *Sopplimenti musicali*, that is, at the end of chapter 32 of book 8 of the third volume, Zarlino wrote "... *che la Musica più tosto sia sottoposta alla Geometria, che alla Arithmetica…*" (Zarlino, 1588, 330), which means that music is subordinate to geometry rather than to arithmetic. Zarlino published the *Sopplimenti musicali* just before his death in February of 1590. This passage in his last work seems to be the first time that Zarlino assumed explicitly that geometry was not just a theoretical tool together with arithmetic for dealing with problems in theoretical music, but rather constituted a better tool for this task then arithmetic.

Concluding remarks

The sixteenth century represented a major revolution in the production of treatises on theoretical music. It witnessed, in distinction to the Pythagorean tradition, the introduction of geometry as a tool not only to solve the problem of division of the tone but also to solve theoretical problems related to the systematization of the temperament, symbolizing a substantial change in the structures and conceptions of ratio underlying theoretical music and thus in the foundations of theoretical music.

Procedures in theoretic musical contexts like those mentioned above made by Erasmus Horicius and others after him brought to music changes in theories of ratios in direction of conceiving such concepts as continuous quantities and compounding as multiplication, intensifying the conflicts associated with the Pythagorean tradition concerning theoretical music, according to which only whole numbers and ratios of whole numbers – discrete quantities – could serve as the basis for theoretical music, whether through a stiff distinction between consonance and dissonance defined by the first four numbers or through the search for a perfect system of intonation based on commensurable ratios.

Such aspects are representative, in a wider sense, of a change undergone by ratios, compounding ratios and in a wider sense by theories of ratio as well as by the foundations of theoretical music in this period, which gradually ceased to be based exclusively on an arithmetical dogmatism to comprise geometry and experimental principles in its basis.

BIBLIOGRAPHY

BARBERA, Andre (1991) *The Euclidean Division of the Canon*, Lincoln: University of Nebraska Press.

BOWER, Calvin M. and Palisca, Claude Victor (1989) *Fundamentals of Music. Anicius Manlius Severinus Boethius*, New Haven & London: Yale University Press.

BYWATER, Michael F. (1980). *Heinrich Schreiber. Ayn new Kunstlich Buech...1518*, London: Scolar Press.

CIRUELO, Pedro (1526) *Cursus quatuor mathematicarum artium liberalium: quas recollegit atque correxit magister Petro Ciruelus*, Alcalá de Henares: Miguel de Eguía.

COHEN, H. Floris (1984) *Quantifying music. The science of music at the first stage of the Scientific Revolution, 1580-1650*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

ERASMUS HORICUS (1500?) *Musica,* Vatican Library, MS Regina lat. 1245.

GOLDMAN, David Paul (1989) Nicholas Cusanus' contribution to music theory, *Rivista Internazionale di musica sacra,* 10/3-4, 308-338.

HEATH, Thomas L. (1956) *The thirteen books of Euclid's elements: translated from the text of Heiberg*, vol. 2: Books III – IX, New York: Dover.

HERLINGER, Jan W. (1981) Marchetto's division of the whole tone, *Journal of the American Musicological Society,* 34,193-216.

MENGE, Henricus (1916) *Euclidis opera omnia viii*, Leipzig: Teubner.

PALISCA, Claude Victor (1995) Zarlino, Gioseffo, in: Sadie, Stanley, The New Grove dictionary of music and musicians, London: Macmillan, 646-649.

PSELLUS, Michael (1556) *Pselli, doctiss. uiri, perspicvvs liber de quatuor mathematicis scientijs, arithmetica, musica, geometria, [et] astronomia: Graece et latine nunc primùm editus*, Basileae: Oporinus.

SANTIAGO KASTNER, Macario (1957) *Fray Juan Bermudo. Declaración de Instrumentos musicales*, Bärenreiter: Verlag Kassel und Basel.

SYLLA, Edith Dudley (1984) Compounding ratios. Bradwardine, Oresme, and the first edition of Newton's Principia, in: Mendelsohn, E. *Transformation and tradition in the sciences. Essays in honor of I. Bernard Cohen*, Cambridge: Cambridge University Press, 11-43.

SCRIBA, Christoph J. (1991) Zum historischen Verhältnis von Mathematik und Musik, *Braunschweigische Wissenschaftliche Gesellschaft, Jahrbuch,* 115-152.

SZABO, Árpád (1978) *The Beginnings of Greek Mathematics*, Budapest: Akademiai Kiado.

TANNERY, Paul (1915) Du Rôle De La Musique Grecque Dans Le Développement De La Mathématique Pure, *Memoires Scientifiques*, Paris, 68-87.

WINNINGTON-INGRAM, R. P. (1995) *Aristonexus*, in: *Sadie, Stanley, The New Grove dictionary of music and musicians*, London: Macmillan, 592.

ZARLINO, Gioseffo (1588) *Sopplimenti musicali del rev. M. Gioseffo Zarlino da Chioggia*, Venetia: Francesco de Franceschi.

NOTATIONS, PROOF PRACTICES AND THE CIRCULATION OF MATHEMATICAL OBJECTS. THE EXAMPLE OF GROUPS (1800-1860)

Caroline EHRHARDT
Université Paris 8, France.

How exactly do mathematical objects circulate from the work of one mathematician to another? The meaning of any mathematical text belongs to its reader: they can understand it differently from its author, they can use the ideas and concepts for a different purpose, and they can even choose different notations and symbolism to write down the mathematical objects it involves [Goldstein, 1995]. But doing so, they slightly change its original meaning. This paper is an attempt to show how far an object that would be said to remain "the same" by mathematicians working with it can be noted, symbolized and used in very different ways, and finally be associated with very different mathematical practices of proofs.

For that purpose, I will take the example of groups from the beginning of the 19th century to the 1860s. I will start from texts in which the use of groups is fundamental to the proof, but in which they are associated to a practice of proving that can be qualified of "literary": the groups do not have specific notation and are not involved into calculation. I will then analyse parts of the work of Evariste Galois (1811-1832). I will show, in particular, that symbolizing groups in different ways led him to associate them to different kind of practices of proof. I will finally examine three attempts of conceptualization that were made in the years 1850-1860 by Arthur Cayley (1821-1895), Thomas Penyngton Kirkman (1806-1895), and Richard Dedekind (1831-1916), which partly or totally relied on their readings of Galois's work, that had been published posthumously in 1846 in the *Journal de mathématiques pures et appliquées* (also known as *Liouville's journal*). In fact, these mathematicians were referring to the same corpus and were apparently talking about the same thing, namely "groups", long before it become an abstract mathematical concept, and long before a book or a treatise would give a definition of it that would be shared by a large mathematical community.

This study of the "groups in the making" will thus emphasize the diversity of approaches that mathematicians can follow when they are working with what we would be said to be *one* mathematical object. In my research about the readings and interpretations that have been made of Galois' *Mémoire sur les conditions de résolubilité des equations par radicaux*, I have studied how the way by which Galois' successors dealt with groups was linked to the specific culture they were working in [Ehrhardt, 2011a; Ehrhardt, 2012]. More precisely, each first reader of Galois endeavored to fill in the holes in Galois's proofs, but they also undertook genuine reconstructions and recastings, and endowed Galois's work with a new meaning, a mathematical « added value ». The questions that each one of those mathematicians tried to answer, the scholarly tradition into which they inscribed Galois's writings, the results to which he associates them, along with the work routines acquired in his mathematical training, the research practice and mathematical outlooks dominant in his mathematical *milieu*, and also the professional implications of his interpretation of Galois, were factors that made each of these readings different from the others. Hence, Galois's first posterity is evidence for the dependence of scholarly practice on local research traditions: mathematicians from different local traditions did not work in the same fashion and did not practice and write the same kind of mathematics.

In the present paper, I would like to emphasize that the exercise of the mathematical activity itself – the ways by which the proofs are written – is embedded into local cultures and specific historical configurations. I will then focus on *how* these mathematicians wrote the groups, on what it implied on what they were *doing* with it, and on what the group notion actually *meant* for them. This approach will allow to put to the test, in the field of mathematics, the conclusions of the anthropologist Jack Goody about lists and tables [Goody, 1977]. In particular, mathematical notations could be seen as "intellectual technologies" in the sense defined by Goody: on the one hand, they depend on specific mathematical cultures and, as so, their diffusion is socially determined; but on the other hand, mathematical notations can change the very nature of the objects, because they change the way mathematicians can use them and think about them. I hope, then, that this historical example will illustrate how different kind of mathematical notations, such as letters, lists or tables, allows mathematicians to practice different operations, to ask different questions or to solve different kind of problems, and, finally, to make mathematical proofs in very different ways. But I also hope to emphasize the fact that the different notations that can be given to a mathematical object, as well as the meanings they are supposed to express, are linked to a particular time, person or place. What we call today "the group concept" is the result a historical process of readings and transmission of papers such as the ones of Galois, Cayley and Dedekind. In this process, symbolism should be seen as a way to convey a message about the mathematical object.

1. Using groups to demonstrate in the beginning of the 19th century

One often says today that Galois had invented/discovered the group notion. Actually, as we will see in the next section, it is true that one finds the word "group" many times in his writings, may it be in the *Mémoire sur les conditions de résolubilité*, or in the letter he wrote to his friend Auguste Chevalier the day before he died, or in his rough works. But what does it exactly mean to say that "Galois has invented/discovered" the notion of group"? In fact, this attribution has a lot to do with the meaning that "groups" acquired *a posteriori* [Ehrhardt, 2011b, chap. 9]. In Galois's paper, the meaning of the word "group" was not really fixed, so that one does not find a definition of groups, in the sense we give today to a mathematical definition. As a consequence, if we want to understand what Galois meant by "group" (but also what other people of his time could understand from his works), we must examine precisely his writings, in order to find out the way he was using groups, as well as the mathematical practices that he associated to them. In other words, that is not a preliminary definition that gives a mathematical sense to groups in Galois's text; this mathematical sense comes from ways of proving, ways of writing, ways of using it.

For this reason, we need to remember that Galois was still a beginner when he wrote his research, and that he had "inherited" some mathematical practices from his training and readings. Actually, trying to "group" (that is to say to gather together in a certain way the roots of an algebraic equation in order to solve it) was already a method that mathematicians of the end of the 18th century found perfectly adequate. For instance, Lagrange wrote two works about equations: a memoir in 1770 [Lagrange, 1770] and a synthesis book in 1797, which was reedited twice at the beginning of the 19th century [Lagrange 1826]. In both cases, one can read proofs that rely on the making of specific sets of roots, organized and written in order to get a cognitive benefit about the properties of the equation, and in particular on the reasons why it will be *a priori* possible to solve it – or not. However, there is no theoretical formulation or particular conceptualization of this idea in Lagrange's published books, and the meaning of the word "group" is the one of the common language. Even if he did not quote it, one can assume that Galois knew Lagrange's synthesis book on equations [Ehrhardt, 2011b, chap. 2].

Moreover, a preface by the academician Poinsot had been added to the 1826 edition of Lagrange's book – the one available when Galois was learning mathematics. In this text, Poinsot was very precise about the mathematical use that one could make of "groups of roots". Poinso took his inspiration at the same time from Lagrange's treatise and from the seventh section of Gauss's *Disquisitiones arithmeticae* (1801):

> Les douze racines imaginaires […] se partagent en quatre groupes de trois racines, telles, dans chacun d'eux, qu'en mettant l'une à la place de l'autre, ces trois racines ne se séparent pas ; et par conséquent, si l'on échange les racines d'un groupe à l'autre, les groupes ne feront que changer de place en conservant toujours les mêmes racines. Ensuite on verra que parmi ces quatre groupes, il y en a deux qui sont tels que tout échange qui fait passer de l'un à l'autre, ramène celui-ci à la place du premier ; ainsi, les deux autres groupes sont dans le même cas ; si donc vous demandez à l'équation du $12^{\text{ème}}$ degré, le diviseur du $3^{\text{ème}}$ qui rassemblerait les trois racines d'un groupe, vous aurez les coefficients de ce diviseur par une équation du $4^{\text{ème}}$ degré ; et si vous cherchez à celle-ci le diviseur du second qui a ses racines correspondantes aux deux groupes conjugués, vous aurez ses coefficients par une équation du $2^{\text{ème}}$ degré. [Poinsot, 1808/1826, p. 370].

Here, Poinsot did much more than a mere commentary. He truly developed a new mathematical reasoning, where the Gaussian ideas of gradual solution and of grouping roots were associated to the lagrangian idea of permuting these roots. He used the same word "group" as Galois would do, and gave a lot of attention to the way this roots were placed inside these new sets.

Besides, Poinsot was far from being the only one that used the word "group" when dealing with equation solving at the beginning of the 19^{th} century. Another instance of reasoning with "groups of roots" can be find in a textbook which was of common use at Galois' time, namely Sylvestre François Lacroix's *Compléments des éléments d'algèbre*, a textbook that Galois must have also read in the context of his training at the high school Louis-le-Grand:

> En effet, parmi les 24 permutations dont ces racines sont susceptibles dans l'expression de θ, celles qui n'opéreraient que des échanges entre les valeurs de θ appartenant au même groupe ne produiraient aucun changement dans les fonctions symétriques de ces quantités. Quant aux autres permutations, elles ne feraient qu'échanger les groupes entre eux; car une valeur de θ appartenant à un groupe quelconque ne peut devenir celle d'un autre, sans que toutes les valeurs composant le premier ne deviennent celles du second, puisque les valeurs d'un même groupe se déduisent toutes de l'une quelconque d'entre elles par le changement de α en α^2, α^3 et α^4 [Lacroix, 1825, p. 49].

A third example, that Galois had certainly not read as it was unpublished at the time, is a memoir by André-Marie Ampère, written apparently in 1810:

> Mr. Poisson m'ayant communiqué deux notes extraites d'un ouvrage allemand sur la résolution des équations de tous les degrés, qui lui avaient été remises par Mr. Malus, je m'aperçus facilement que le vice de la solution indiquée dans ces notes, consistait en ce que l'auteur, après avoir dit avec raison que si l'on désigne par x, x', x'', x''', x^{IV} les racines d'une équation du cinquième degré, et a, b, c, d, e des coefficients constants, il y aura parmi les 120 valeurs dont ax + bx' +cx'' + dx''' + ex^{IV} est susceptible, 24 groupes qui répondront à autant d'équations du 5me degré dont les coefficients seront donnés par une équation du 24[me] degré, et qu'on obtiendra en permutant les racines sans en altérer l'ordre, et seulement en les faisant changer d'un, de deux, de trois, &c. rangs, pour avoir les cinq combinaisons d'un même groupe, prétend que si l'on réunit en une équation les coefficients de 4 de ces 24 équations du cinquième degré, en choisissant ceux qui répondent aux divers groupes qu'on forme en n'appliquant le même genre de permutation qu'à quatre des racines et laissant la cinquième à sa place, les coefficients de l'équation ainsi formés ne seront susceptibles que de six valeurs. Il faudrait pour que sans rien supposer de particulier relativement à aucune des racines, puisque l'analyse ne peut exprimer que des propriétés communes à ces cinq racines, les vingt combinaisons correspondantes à ces quatre groupes rentrassent constamment les unes dans les autres en suivant le mode de permutation convenu.
>
> Mais cela n'arrive point précisément à cause que l'on établit quelque chose de particulier à l'une des racines, en convenant d'en laisser une à sa place. Dès lors, si c'est par exemple x^{IV} qu'on laisse à sa place dans un groupe, on aura un assemblage de quatre groupes, mais si c'est ensuite x''' qu'on ne déplace pas dans le premier groupe, on en aura trois autres que le calcul lui associera nécessairement en même temps, ce qui donnera un autre assemblage de quatre groupes qui ne pourront être séparés [de?] celui qu'on avait d'abord obtenu, puisque ces deux assemblages auront un groupe commun, l'équation correspondante ne pourra donc manquer de s'élever plus haut que le 6[ème] degré[1].

This text shows even more precisely than the two others that the idea of "grouping" roots, as well as the idea of looking to the different ways by which these roots could be placed within each group when one permutes them, was quite known and spread at the beginning of the 19[th] century – at least among the people learned in and interested by mathematics. In other words, "groups" were already associated with a mathematical practice of proving results about equations. This practices consisted in making and organizing sets of roots. However, this mathematical practice took the form of an explanation, given in a literary style, instead of the one of a calculation. While using "groups of roots" in mathematical reasoning about the algebraic solution of equations, these mathematicians didn't try to symbolize the group, or to imagine a specific mathematical notation for it. Instead, they associated groups with a mental

---

[1] A.-M. Ampère, « Essai d'une solution complète des équations du 5[e] degré », Archives de l'Académie des sciences, Paris, chemise 25, carton 2.

image: they "looked like" a kind of racks where roots were placed and moved all along the proof.

These examples also show us that, even if Galois actually did do something new from these ideas about groups of roots, he also took as a point of departure things that were very well known at the time, in particular because they were part of the training of future scientists and engineers. As far as the idea of group is concerned, Galois's mathematics were not "out of his time", contrary to what is very often said about them. Galois made new and interesting things from mathematical ideas and practices that already existed and that he had learned (which was already an achievement!). But what did Galois do exactly with groups? Where do we find groups in his writings?

2. Writing practices associated to groups in Galois's writings.

One of the specificity of Galois's work is that one can read the word "groups" several times, but never with a precise definition of it. One thing that makes Galois's writings difficult to read is that there are several "strata", that is to say that he often rewrote his papers; sometimes the first versions have not been preserved and are lacking; sometimes several versions still exist, but not all of them are dated. However, one can distinguish between two different kings of writing of the group notion, each of them being associated to specific uses and mathematical practices. On the one hand, Galois wrote groups with a tabular notation; on the other hand, he wrote groups with a single letter. From what I managed to reconstruct from the chronology of Galois's writings, with the help of Bourgne and Azra's edition [Galois, 1997], I would say that the first notation is rather linked to stages of research and clarification, while the second notation is rather linked to attempts of finding ways to formulate the results. However, both have been used by Galois from the beginning of his research to its end, that is to say from 1828 to 1832.

2. a. Group as a table

In his *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* submitted to the French Academy of Science, Galois defined the "group of an equation" in the following theorem:

> Soit une équation donnée, dont a, b, c, … sont les *m* racines. Il y aura toujours un groupe de permutations de a,b,c… qui jouira de la propriété suivante :

> 1° Que toute fonction des racines invariable par les permutations de ce groupe soit rationnellement connue ;
>
> 2° Réciproquement, que toute fonction des racines, déterminable rationnellement, soit invariable par les substitutions. [Galois, 1997, p. 51].

It is important to notice here that, if one only read the theorem alone, the word "group" doesn't necessarily have a specific mathematical sense. It could just as well be understood as a simple set of roots. Actually, the mathematical meaning comes from the proof of the theorem and, more precisely, from the way this group is written in it:

> Soit V une fonction rationnelle des racines telle que toute les racines soient fonctions rationnelles de V. Considérons l'équation irréductible dont V est une racine. Soient V, V', V'', …, $V^{(n-1)}$ les racines de cette équation.
>
> Soient φV, $\varphi_1 V$, $\varphi_2 V$, …, $\varphi_{m-1} V$ les racines de la proposée.
>
> Ecrivons les n permutations suivantes des racines.

$$\begin{array}{c|ccccc}
(V) & \varphi V, & \varphi_1 V, & \varphi_2 V, & \ldots, & \varphi_{m-1} V, \\
(V') & \varphi V', & \varphi_1 V', & \varphi_2 V', & \ldots, & \varphi_{m-1} V', \\
(V'') & \varphi V'', & \varphi_1 V'', & \varphi_2 V'', & \ldots, & \varphi_{m-1} V'', \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
(V^{(n-1)}) & \varphi V^{(n-1)}, & \varphi_1 V^{(n-1)}, & \varphi_2 V^{(n-1)}, & \ldots, & \varphi_{m-1} V^{(n-1)}
\end{array}$$

> Je dis que ce groupe jouit de la propriété énoncée. [Galois, 1997, p. 52]

Hence, this is this tabular disposition that actually *defines* the group of an equation. Moreover, it has three different functions. First, even if Galois never used it in the following proofs of this memoir, other documents show that he actually relied on the visual aid provided by the tables when he was thinking about groups. For instance, we can read on a rough work that must have been written in 1831:

> Groupe réductible est un groupe dans les permutations duquel n lettres ne sortent pas de n places fixes. Tel le groupe
>
> a b c d e   a b d e c   a b e c d
>
> b a c d e   b a d e c   b a e c d
>
> Un groupe irréductible, etc.
>
> Un groupe irréductible est tel qu'une lettre donnée occupe une place donnée […]
>
> Groupe irréductible non primitif est celui où l'on a *n* places et *n* lettres telles que une de ces lettres ne puisse occuper une de ces places, sans que les *n* lettre n'occupent les *n* places. [fol. 84, Galois, 1997, p. 79]

So, the spatial disposition of the elements, that is to say their "places", plays a role in the study of the properties of groups. In that case, Galois actually used the idea of "organizing roots into sets" that mathematicians like Lagrange, Lacroix and Ampère already knew, but he made a mathematical translation instead of a literary explanation. Even if this notation tended to disappear in final versions of Galois' texts, it remained a tool for reasoning in Galois's mathematical research process. It was, for instance, what he was still doing while working on elliptic functions during the year 1832, as we can see on his manuscripts things like this one [fol. 159b, Galois, 1997, p. 311][2].

$$\begin{array}{c|c|c} 4\ 3 & 2\ 1 & \infty\ 0 \\ 1\ 2 & 0\ \infty & 4\ 3 \end{array}$$

Second, the tabular notation could also be a tool to write a mathematical proof about groups. Let's take for instance an extract from the manuscript entitled "Des equations primitives qui sont solubles par radicaux":

> Cela posé, soient
>
> $$a_0\ a_1\ a_2\ \ldots.\ a_{P-1}$$
> $$b_0\ b_1\ b_2\ \ldots.\ b_{P-1}$$
> $$c_0\ c_1\ c_2\ \ldots.\ c_{P-1}$$
> $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
>
> Les N lettres: supposons que chaque ligne horizontale représente un système de lettres conjointes.
>
> Soient
>
> $$a_0\ a_{0.1}\ a_{0.2}\ \ldots.\ a_{0.P-1}$$
>
> P lettres conjointes toutes situées dans la première colonne verticale (il est clair que nous pouvons faire qu'il en soit ainsi, en intervertissant l'ordre des lignes horizontales).
>
> Soient de même
>
> $$a_{1.0}\ a_{1.1}\ a_{1.2}\ \ldots.\ a_{1.P-1}$$
>
> P lettres conjointes toutes situées dans la seconde colonne verticale, de sorte que
>
> $$a_{1.0}\ a_{1.1}\ a_{1.2}\ \ldots.\ a_{1.P-1}$$
>
> appartiennent respectivement aux mêmes lignes horizontales que

[2] See also fol. 177a, in [Galois, 1997, p. 331].

$a_0\ a_{0.1}\ a_{0.2}\ \ldots\ a_{0.P-1}.$

Soient de même les systèmes de lettres conjointes

$a_{2.0}\ a_{2.1}\ a_{2.2}\ \ldots\ a_{2.P-1}$

$a_{3.0}\ a_{3.1}\ a_{3.2}\ \ldots\ a_{3.P-1}$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Nous obtiendrons ainsi en tout P^2 lettres. Si le nombre total de lettres n'est pas épuisé, on prendra un troisième indice, en sorte que

$a_{m.n.0}\ \ a_{m.n.1}\ \ a_{m.n.2}\ \ldots\ a_{m.n.P-1}$

soient en général un système de lettres conjointes. Et l'on parviendra ainsi à cette conclusion que $N=P^{\mu}$, μ étant un certain nombre égal à celui des indices différents dont nous avons besoin. [Fol. 37b and fol. 38a, Galois, 1997, p. 131-133].

As we can see, the whole proof was based on the possibility given by the tabular representation to see analogies between the lines and the columns, and to associate a specific place to each element, what was symbolized by the indexes coordinates 0.1, 0.2, etc. The proof also strongly relied on the formal symmetry of the table, once again between lines and columns, which made it equivalent to "enter" into the table either horizontally or vertically. Moreover, the image of the table, written once at the beginning, seemed to have such a power of suggestion that the mental representation of the group could finally take the place of the written one. In fact, as we can see, Galois indicated the manipulation one had to make on the elements of the table, but he didn't need to write them effectively because it was not difficult to imagine the steps in one's head. Therefore, we could say that another function of the table was to play the role of a mental support that for the representation of the object. In that case, the tabular notation clearly allows mathematical practices that would be very difficult to express in French language.

There is still a third use of tabular representation in Galois's work that I would like to focus on, which illustrate the relation between the form and the sense of the groups in a slightly different way. The memoir on equations had been sent to the Academy of Science, which means that it was a paper that Galois had written in order that it would be be read by other mathematicians. Then, the aim was not only to do mathematical research and find convenient ways to write it down, but also to make sure that the results would be understood by the readers. Giving an example in a mathematical language and notation that people are used to, could be a good way to this end. Thus, just after the very theoretical proof of his fundamental theorem, Galois used the table notation to illustrate how his chain of reasoning worked, on the well-known case of a 4^{th} degree equation:

> Il est aisé d'observer cette marche dans la résolution connue des équations générales du 4ème degré. En effet, ces équations se résolvent au moyen d'une équation du 3ème degré, qui exige elle-même l'extraction d'une racine carrée. Dans la suite naturelle des idées, c'est donc par une racine carrée qu'il faut commencer. Or en adjoignant à l'équation du quatrième degré cette racine carrée, le groupe de l'équation qui contenait en tout 24 substitutions, se décompose en deux qui n'en contiennent que douze. En désignant par a b c d les racines, voici l'un de ces groupes :
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | a b c d | a c d b | a d b c |
> | b a d c | c a b d | d a c b |
> | c d a b | d b a c | b c a d |
> | d c b a | b d c a | c b d a |
>
> Maintenant ce groupe se partage lui-même en trois groupes, comme il est indiqué aux théorèmes II et III. Ainsi par l'extraction d'un seul radical du troisième degré il reste simplement le groupe :
>
> a b c d
> b a d c
> c d a b
> d c b a
>
> Ce groupe se partage lui-même en deux groupes : a b c d c d a b
> b a d c d c b a
>
> Ainsi, après une simple extraction de racines carrée, il restera : a b c d
> b a d c
>
> Ce qui se résoudra enfin par une simple extraction de racine carrée. [Galois, 1997, p. 99]

Here, the table representation was used to make it easier for the reader to understand, for two reasons. On the one hand, the tables were written in such a way that it seemed very "natural" that the groups would split into smaller ones. For instance, the first line of the 12-order group was not written in alphabetical order, but in order to make it clear that the three big columns were equivalent; then, the way the group of order 4 was written "anticipated" its split into the two groups of order 2 and, finally, these two final groups were once more written in a way that made clear that they were equivalent. On the other way, using such a "combinatory method" must have been a usual practice not only for Galois, but also to his readers. As a matter of fact, the way the groups are written in this example was very close to the notations used by Lagrange in his research, which was, as we have seen, very well known of every geometers at that time[3]. So, even if it was not the same thing, the ways Galois wrote his results actually looked like something the readers were used to see. This way of writing may have made this paper look more familiar for the first French readers. From this example we could say, then, that using a specific notation is also a manner to remain within a specific mathematical culture, historically and socially determined: one employs ways of writing that one has already seen and, doing that, one makes it possible that readers sharing the same culture should understand it.

2. b. Group as a single letter

The other way used by Galois to write the group of an equation is a single letter: "le groupe G". Galois nearly didn't use it in the memoir sent to the Academy, where he much more often preferred to write "le groupe" or "le groupe de l'équation" in words. This notation didn't either appear in the papers published by Galois in the *Annales de Gergonne* and the *Bulletin de Férussac*. Moreover, as we have seen, it wasn't the way to write the groups that Galois used when he was actually doing his research, preferring in that case the table notation. But we still find it on several manuscripts, including the preliminary version of one of the theorem of his memoir (summer 1830), some rough works written at the end of 1831, and the manuscripts on primitive equations (1830). There is also an extract of the letter to Galois's friend Auguste Chevalier, written just before Galois's death in 1832, where Galois uses it. Let's look to some of these occurrences of the letter notation:

> Soit un groupe G de mt.n permutations, qui se décompose en n groupes semblables à H. Supposons que le groupe H se décompose en t groupes de m permutations semblables à k […] » [Fol. 95a, Galois, 1997, p. 149].
>
> « On appelle groupe un système de permutations tel que etc. Nous représenterons cet ensemble par G. GS est le groupe engendré lorsqu'on opère sur tout le groupe G la substitution S. Il sera dit semblable, etc. » [Fol. 84a, Galois, 1997, p. 79].
>
> « Le groupe G dont l'équation est soluble par radicaux doit se partager en un nombre premier de groupes H semblables et identiques. Ce groupe H est un nombre premier de groupes K semblables et identiques, et ainsi de suite jusqu'à un certain groupe M qui ne contiendra plus qu'un nombre premier de substitutions » [Fol. 55a, Galois, 1997, p. 97]

[3] See for instance [Lagrange, 1770, p. 321], where Lagrange used a tabular notation to organise the roots, just like Galois did in fol. 37. See also [Lagrange, 1770, p. 394], where Lagrange wrote all the ways to permute the letters, and used a systematic process for that: he kept the same last letter and permutes the others.

> « Quand un groupe G en contient un autre H, le groupe G peut se partager en groupes, que l'on obtient chacun en opérant sur les permutations de H une même substitution ; en sorte que : G=H+HS+HS'+…. [Fol. 8a, Galois, 1997, p. 173-174].

The single-letter notation led to another way to work on groups. One obvious thing is that each single elements of the group didn't matter anymore. When using the table notation, "the unity" with which Galois was reasoning was an element, or a set of elements going together in lines or columns. Here, on the contrary, the group could be seen as <u>one</u> mathematical object, and not as a kind of cluster. Another thing that may be worth to notice is that, with this notation, there was no need to precise what were exactly the elements contained in the group and to explain how they "moved" from one place to another within the group. Moreover, even if these elements were always substitutions in Galois's research, the second citation is very explicit on the fact that a group could eventually be *not* attached an equation.

These two properties of the single-letter notation had direct consequences on the mathematical practices used by Galois. On the one hand, these examples show that what Galois considered that the right thing to do with groups was to split them into smaller ones. But this kind of operation would be confusing without giving a name to each of the groups, especially when there was a three-steps decomposition. On the same way, it would not have been very convenient to write a table for every group Galois was talking about. On the contrary, with the single-letter notation, the successive steps were symbolized by the alphabetic order ("G, H, K,…, M") which played, implicitly, the same role as an inclusion symbol. Moreover, the single-letter notation allows to write "H is contained in G" without writing explicitly what are the elements of G which are also in H. Hence, the single-letter notation gives the possibility to look to how a group can split into smaller ones, from a general point of view, and independently of what happens *exactly* to each element. Then, with this notation, groups become much easier to handle

On the other hand, practices of "manipulation" of groups become easier. More precisely, Galois could rely on an operating formalism analogous to the one of usual algebraic operations. In the letter to Chevalier, he used the symbols of multiplication and addition on an explicit way, but the sense of these operations remains intuitive, as he didn't specify the rules they should follow. However, thanks to the analogy with the regular algebraic operations, Galois could do with groups exactly the same thing as what was usually done at that time to introduce the rules of calculus with numbers or algebraic symbols. As a matter of fact, this process by analogy was used by Bézout in the case of negative quantities in his textbook of arithmetic [Bézout, 1781] and by Lacroix in the case of algebraic and imaginaries quantities in his textbooks of algebra

[Lacroix, 1807]. In a word, because Galois used a notation similar to the one used for usual algebraic quantities, he could also use methods and practices that must have sound "natural" for him and for contemporaneous mathematicians.

To sum up the first part of this paper, I would like to emphasize the fact that choosing a way to write the groups is linked to different way to think about this object – it is to say to the very sense of what a group exactly is, of what it is made for, and of what it is made of. It also makes some kind of proofs easier, and other kinds more difficult. For instance, with a table, Galois could look to every elements, ask if some of them would not "fit" together, and use lines and columns to show this point mathematically and visually. With a single letter, he could do "as if" groups were regular algebraic quantities, independently from equations, and look for their specific properties in term of decomposition. But it is also important to notice that Galois had not invented these notations. They were already used at that time for other objects. This is of course a too short case study to draw general conclusions, but it almost raises a question. Symbolism doesn't carry immanent ways of thinking but, on the contrary, some chains/trends of reasoning, which are historically constructed and which are part of specific epistemological cultures, can circulate thanks to them, in particular from one mathematical field to another. In that context, I will now look to this circulation phenomenon a little more closely, analysing the works of some mathematicians who used Galois's published research during the 1850s and 1860s. The underlying question could then be: what exactly circulates while other mathematicians took groups over for their own research?

3. "Groups" in the work of Cayley.

In 1854, Cayley published the two first parts of a paper entitled "On the theory of groups, as depending on the symbolical equation $\theta^n=1$", in the *Philosophical Magazine*. It was continued with a third part, published in 1859. At the very beginning of this paper, just after having given a definition of the word "group", Cayley indicated, in a footnote that "the idea of group, applied to substitutions, [was] due to Galois". The definition Cayley gave for a group was the following:

> A set of symbol,
>
> $$1, \alpha, \beta, \ldots$$

> all of them different, and such as the product of any two of them (no matter in what order), or the product of anyone of them into himself, belongs to the set is said to be a group. It follows that if […] the symbols of the group are multiplied together so as to form a table, thus:
>
> | | | Further factors | | | |
> |---|---|---|---|---|---|
> | | | 1 | α | β | .. |
> | Nearer factors | 1 | 1 | α | β | .. |
> | | α | α | α^2 | $\beta\alpha$ | |
> | | β | β | $\alpha\beta$ | β^2 | |
> | | | : | | | |
>
> that as well each line as each column of the square will contain all the symbols 1, α, β, …". [Cayley, 1854, p. 41].

Thus, in Cayley's paper, there was two ways for writing groups: using a list of elements and using a multiplication table. However, in spite of what Cayley claimed, none of them was close to Galois's symbolism. In fact, what had circulated from Galois to Cayley together with the word "group" seemed not to be symbolism. This raises two questions: first, what are the specificities of Cayley's notations, and, in particular, where could they come from and what kind of mathematical practices are they linked with? Second: what did Cayley exactly take from Galois?

First of all, we have to remark that Cayley used the letters 1, α, β, … to symbolize general operations. Each of them could be, for instance, one of the permutations that Galois wrote with a list of letters. But using one letter instead of a list, Cayley could multiply these operations just like any algebraic symbols; he could also write the result just like an algebraic symbol. In other words, with this notation, he could use the "regular" algebraic chains of reasoning, without having to consider in what these symbol could be special. As a consequence, he could apply to the groups the general ideas that one can read, for instance, in Peacock's *Treatise on Algebra* [Peacock, 1830], or use the same process than the one used by Babbage in his "Essay towards the Calculus of functions" [Babbage, 1815]. In other words, this choice in notations was linked to a mathematical practice that was somehow typical of the mathematical culture that Cayley belonged to, that is to say the one that is often called "the Cambridge algebraic school" [Durand-Richard, 1996]. But this choice in notations was also linked to a specific way to examine the groups. The calculation that one could do over the elements was supposed to lead nearly automatically to the interesting properties of the set:

algebraic calculation on the elements of the groups was the mathematical practice on which the very nature of the groups was founded.

More precisely, Cayley used two notations at the same time to study groups. For instance, when he looked to the groups of four elements, he began using the list-notation to find out what were the different possibilities, and, then completed the list by writing, in parentheses, the restrictions imposed by the definition.

Hence, one of the groups was written:

$$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ (\alpha^4=1).$$

While the other one was written:

$$1, \alpha, \beta, \alpha\beta \ (\alpha^2=1, \beta^2=1, \alpha\beta=\beta\alpha).$$

But after that, in a second time, Cayley associated a table to each of the groups he had found [Cayley, 1854, p. 42-43]:

	1,	α,	β,	γ
1	1	α	β	γ
α	α	β	γ	1
β	β	γ	1	α
γ	γ	1	α	β

	1	α	β	γ
1	1	α	β	γ
α	α	1	γ	β
β	β	γ	1	α
γ	γ	β	α	1

In fact, these tables were not tools to prove the results. They were just a way to *show* them, and to make clear the differences between the two configurations. In that sense, this table notation was very linked to what Cayley really wanted to convince his readers of. As a matter of fact, the point of the paper was to show that "systems of this form are of frequent occurrence in analysis, and it is only on account of their extreme simplicity that they have not been expressively remarked". To develop that purpose, a long further development was dedicated to giving several examples taken from elliptic functions, quadratic forms, matrix and quaternions theories. So, the meaning that Cayley gave to his groups was the one of models with which one could see (in the literal meaning) the similarities between distinct mathematical situations. And, for that purpose, the multiplications tables were very convenient tools, as they provided an easy way to check which configuration of group corresponded to a given particular case.

Besides, this kind of tables was constructed to show how the elements of a given set operated on each other. In that, they were very different of the ones Galois had used, which were constructed to show that some elements of the group could be put together[4]. Therefore, the notations that Cayley used made doable operations that weren't with other ones (and in particular with Galois's). Using lists can be considered as a tool for mathematical proving, and using tables is a way to reach the general aims of Cayley's paper. These ways to write groups also betray the very meaning that Cayley gave to them and, in particular, the fact that he saw them as "algebraic" in the sense of the Cambridge school. By the same token, the notations may influence the reader's understanding of the paper. Using tables that recall the ones that the readers may have seen in other works of the British algebraic school implicitly indicates that symbolic algebra is the right framework to understand this paper.

We could ask ourselves, therefore, why Cayley found it necessary to quote Galois's work or, in other words, what has circulated if it's neither the symbolism nor the very meaning of what is a group? My hypothesis is that the answer can be found in Cayley's writing practices and, more precisely, in the bold lines that we can see in the second table of the group of four elements. As a matter of fact, this bold line separates the four elements 1, α, β, γ in two sets of two elements, 1, α, and β, γ. This could tend to show that, in the particular configuration that is represented by this table, the group can be split into two smaller ones. Hence, this notation could be a way for Cayley to express one of Galois's fundamental characteristics of groups, namely that they can be cut into smaller ones under some conditions. In that particular case, we can note that the symbolism itself has not been imported from Galois's work to Cayley's, but that some "ideas" about groups have in fact been translated from one system of notation to another through the circulation process.

[4] Cayley's notational choices reflect in fact his belonging to the Cambridge algebraic school, as Cayley's tables were very similar to the one used by Hamilton on quaternions [Hamilton, 1853, p. 538], or even to one found in Augustus de Morgan's *Formal Logic* [De Morgan, 1847, p. 74].

4. Kirkman's heterodox group theory

Cayley's paper is now, by far, the most famous reference about groups in English language in the middle of the 19th century. However, Cayley was not the only one to write about groups in the United Kingdom at the time. Another mathematician, Thomas Penyngton Kirkman, had constructed a whole "group theory" in a set of papers he wrote during the years 1860-1862[5]. Kirkman did not adopt Cayley's general viewpoint, and limited his enquiry to substitutions group. However, he followed Cayley when he gave a definition of what was a group according to him, writing that the "usual test" was to check if the product of any two substitutions of the group was a substitution of the group, which was exactly the definition hat one can read in Cayley's paper (quoted above). Actually, Cayley and Kirkman wrote to each other from the second half of the 1840s, and knew each other's works [Crilly, 2006, p.142-154 and 247-250]. In that context, it is not very surprising that Cayley's paper had been quoted several times in Kirkman's works. Kirkman's works on group and his interest for it certainly had to do with the Algebra that was practiced in England at the time: Kirkman had published papers in leading journals like the *Cambridge and Dublin mathematical Journals* or the *Philosophical Magazine* and he had contacts with other British leading mathematicians. However, the reasons of his interest for groups did not come from his local intellectual environment, and the practices he associated to them were quite different from the ones of symbolical algebra. Among the several references that Kirkman made to Cayley, one is of particular relevance to emphasize this point:

> The difficulty of the step from the analytical definition of a group to its actual construction is shown by the fact that M. Cayley did not succeed in constructing this group till long after he had published its definition [Kirkman, 1860, p. 394].

Thus, even if he recognized Cayley's works as highly valuable, it was not his "analytical" approach that Kirkman wanted to follow. According to Kirkman, the default of this method was that it couldn't provide easily the expressions of the groups one was looking for. More generally, this quotation shows to what extend Kirkman's and Cayley's projects differed. Cayley wanted to show that the group concept was "the hidden reason" why some very different mathematical phenomena worked on the same way, whereas Kirkman did seem to have this kind of "meta-mathematical" aim while working on groups.

---

[5] The many papers published by Kirkman are listed in [Biggs, 1981].

Instead, Kirkman was interested by an important application of the groups, namely finding the number of values a function can take when one permutes its variable. This has been at the time "hitherto quite a French question" [Letter quoted in Crilly, 2006, p. 247]: the problem originated in the works of Lagrange on equations [Lagrange 1770; Lagrange 1826], and had been tackled first by Cauchy, and second by the young mathematicians Serret and Bertrand, respectively in 1845 and 1850 [Bertrand, 1845; Serret, 1850; Ehrhardt, 2012, p. 160-170]. In 1858, it had become the subject of the *Grand Prix de mathématiques* of the French Academy of Science, to be attributed in 1860 and for which Kirkman's longer memoir about groups was competing.

The fact that the issue of substitutions (in particular in their links with the theory of equations and of the number of values of a functions can take when one permutes its variables) was one of the frameworks of Kirkman's papers can be seen in the quotations he made to other mathematical works (those of Cauchy, Galois, Jordan, but also of Betti). It can also be seen from some of the practices he associated to groups, which came from Cauchy's approach to the problem[6]. For instance, after having defined a group as a kind of sum of its elements ($G=1+ A_1+ A_2+\dots +A_{k-1}$ for a group of order k), Kirkman took from Cauchy the idea of multiplying on the right and on the left (to obtain $PGP^{-1}=1+ PA_1P^{-1}+ PA_2P^{-1}+\dots + PA_{k-1}P^{-1}$). This allowed him to calculate at the same time with the sets and with its elements, as Cauchy had done with the systems of conjugated substitutions[7].

The Academy received three anonymous memoirs, but finally decided not to give the Prize, because "none of them answered in a sufficient manner to the intents of the Academy". About Kirkman's memoir, the Academy added:

> The memoir used a very clever notation that could certainly provide simplifications in the study of substitutions groups but that, however, it contained very few new and truly important facts [*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* t. 52, 1861, p. 555-556].

---

[6] On the contrary, Kirkman was very careful in explaining the difference with Galois's work and his own research.

[7] Another instance of practice taken from Cauchy, is the definitions that Kirkman gave of permutation and arrangement. Cauchy had defined the product of an arrangement by a substitution:

$$\begin{pmatrix} xzy \\ xyz \end{pmatrix} xyz = xzy \, .$$

Kirkman putted it as: $\dfrac{A_m}{A_n} B = C$, and adding that "the effect on the substitution on B is to exchange in B, for any letter a, that which stands above a in the substitution".

Kirkman felt very angry about that, as one can see from the many times he came back on it in his following papers. However, it seems to me that what was new in Kirkman's papers was maybe less a question of "facts" than a question of methodology. The very fact that Kirkman defined the framework of the Prize as a "French question" shows that he was aware that his own approach might have not been the better one to convince the French academicians. He even explicitly explained that his own methodology was completely different from the one used by the other mathematicians:

> The most remarkable thing in this method is that we need no algebraical substitutions: we are never conscious of their existence. It turns out that the ingenious and learned efforts of the French and Italian mathematicians to conquer this theory with algebra, with its formidable army of congruences and imaginaries, have been from the beginning a brilliant error. The problem is tactical, ad its solution is tactical. [Kirkman, 1862-1863, p. 140]

In other words, even if Kirkman's use of groups and some of the practices he associated to it could be inscribed within this "French tradition", something in the way he dealt with groups remained outside the theory of substitutions. To understand where Kirkman's heterodoxy came from, we have to look to the explicit methodological framework that Kirkman referred to, which he called "Tactics", and which involved specific notations and practices of proving.

Kirkman defined a "tactical investigation" as "one in which no numerical equations or congruence are necessarily used". More precisely, the tactical methods rely on the handling of graphical process, and avoid, if possible, the use of calculation. Hence, tactics has to do with combinatorics, but it has much more to do with practices of handling tables and lists of numbers.

The way by which Kirkman found the square roots of the substitution $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ gives us a good example of what a tactical practice is.

Kirkman starts with two auxiliary groups:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 1 & 4 & 3^2 \\ 3^2 & 4^2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1^1 \end{array} \qquad \text{and} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 1 & 4^2 & 3 \\ 3^2 & 4 & 1 & 2^2 \\ 4^2 & 3^2 & 2 & 1 \end{array}$$

then he replaces the number 1, 2, 3 et 4 respectively by:

1 2	3 4	5 6	and	7 8
2 1	4 3	6 5		8 7

Each of these tables represents a group of order 2. When a number of the auxiliary group is written with a square, it is replaced by the table symmetric to the preceding one. For instance, the line 2^2 1 4 3^2 becomes:

4	3	1	2	7	8	6	5
3	4	2	1	8	7	5	6

Doing so Kirkman obtains two groups of order 8

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5	8	7
4	3	1	2	7	8	6	5
3	4	2	1	8	7	5	6
6	5	8	7	1	2	3	4
5	6	7	8	2	1	4	3
7	8	6	5	3	4	2	1
8	7	5	6	4	3	1	2

and

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5	8	7
4	3	1	2	8	7	5	6
3	4	2	1	7	8	6	5
6	5	7	8	1	2	4	3
5	6	8	7	2	1	3	4
8	7	6	5	3	4	1	2
7	8	5	6	4	3	2	1

The first line is identity, the second one is the substitution that was given, and the others are its square roots [Kirkman, 1860-1861].

This kind of practices of proving could seem very strange today. It also let the French academicians of 1860 stonily indifferent. Kirkman justified the interest of his method by its simplicity and convenience, because, "having your group on the page you [had], in three seconds, in its most simple and useful form for the comparison or for all computations, one of the explicit functions required" [Kirkman, 1862-1863, p. 141]. As a matter of fact, this way to deal with groups, which was not heavily theoretical but softly combinatorial, was linked to a specific use of groups, and to an idea of how and what for this use worked.

First, we can notice that, Kirkman, just like Galois, used his tabular notation as a tool to write his proof, which actually entirely relied on the disposal of the numbers. However, Kirkman's tabular notation did not seem to be a way to show the reader how the proof worked and to make him understand the process. On the contrary, Kirkman's method looks like a "magic recipe", for which it is difficult to get into the reason why the proof works like that and not in another way. Kirkman didn't tell, for instance, how the two first auxiliary groups were chosen.

Second, this process is, just like the ones Galois used with tables, a practice of mathematical proving that avoids calculation but it is also a way to replace it. It is the case, for instance, when Kirkman uses the square symbol to show that he reverses the two lines, which could have been done instead with a substitution. Hence, Kirkman's tables were not only a mathematical way to express mental images that would be difficult to express in words. They also offered a way to write proofs that was alternative to the the algebraic language.

These two characteristics of Kirkman's practice of mathematical proving, which used groups symbolized by number tables, can be related to the specific context from which Kirkman's research took its coherence and meaning. As a matter of fact, Kirkman's interest for "the number of values that a function can take when one permutes its variable" originally came from a kind of mathematical activity that did not took place within universities, scholarly societies or scientific academies, but essentially within popular journals: the one of solving mathematical puzzles. The paper about combinatorics thanks to which Kirkman managed to get in touch with Cayley, in 1846, was a particular case of a more general problem, which is to find the greatest number of combinations of y elements that can be made with x symbols, so that no combination of z elements together shall be twice employed. This problem had been set two years previously, in 1844, as the Mathematical Prize Question of the *Lady's and Gentleman Diary*. Hence, the interest of Kirkman for combinatorics came from a challenge in a popular annual publication [Biggs, 1981]. When solving the problem with y=3 and z=2, Kirkman used processes very similar to the ones he would call "tactical" ten years later: writing down the objects with a particular layout, using columns and circles, and presenting the procedure to follow as the "rule" to solve the problem [Kirkman, 1847]. The fact that Kirman was not very concerned with explaining why his process worked might have had to do with this "recreational context", where the most important thing is to get the result, the "value" associated with what a good proof being in that case certainly simplicity and convenience – that is to say "cleverness".

After having published his paper in the *Cambridge and Dublin mathematical journal* in 1846 Kirkman came back to recreational mathematics, setting a mathematical puzzle – known as "the fifteen schoolgirls problem" – which is a particular case of the problem above with x=15 and which was solved by Cayley himself. This famous problem was the subject of a priority quarrel between Kirkman and James Joseph Sylvester, another mathematician close to Cayley. At the same time when Kirkman published his memoir on group theory, Sylvester wrote several papers in order to defend his paternity [Sylvester, 1861a; Sylvester, 1861b; Sylvester, 1861c; Sylvester, 1862]. In these papers, he defined Tactics as the "third pure mathematical science", whose object was order while the two others had number and space for objects, and explicitly mentioned the theory of Groups as being one of the special branches of Tactic. Our point, here, is not to come back on this quarrel; but what is important to notice for our purpose is, first, that the practices that Sylvester qualified as "tactical" where very similar to the ones of Kirkman related above; second, that, Cayley, Sylvester and Kirkman where writing to each others at the time, the research about groups being one of the interests they shared. Hence, the fact of using groups in a tactical way to avoid algebraic calculation was not only a pragmatic way to practice mathematics: it was also the very aim of the bigger field, Tactics, in which Kirkman, just like Sylvester, inscribed his research on groups.

5. Dedekind's Galois theory

Richard Dedekind made a seminar about Galois's works during the years 1856-57 and 1857-58 at the University of Göttingen [Dedekind, 1981][8]. In that occasion, he also gave explanations about the notion of group. This field of research was at the time quite new for him. The previous papers that he had published, in 1853 and 1855, were about Eulerian integrals and rectangular coordinates. It's quite obvious that Dedekind knew the Galois's paper published in *Liouville's Journal* in 1846, but we can assume that he knew Cayley's one too. As a matter of fact, in one of his previous papers [Dedekind, 1855], Dedekind quoted a memoir by Boole that had been published in the same issue of the same journal that Cayley's paper on groups. Hence Dedekind had two different approaches of groups at his disposal when he started his seminar. The beginning of the manuscript of his lectures shows that he actually used both of them. That Dedekind was a reader of Galois can be seen in the very order of his lessons, which follows Galois's *Mémoire*, and in the recurrent quotation of Galois's name. A consequence of that reading was that Dedekind only considered groups of substitutions, which was sufficient in the framework of the theory of equations. On the other hand, Dedekind gave a definition of groups, which Galois had not done, one close to Cayley's:

> A set G of g substitutions is a group of order g if every arbitrary product of substitutions contained in G is still contained in G. [Dedekind, 1981, p. 64].

Moreover, even if Dedekind's primary focus was on substitutions, he explained that:

> The following research is based only based on the two previous fundamental results and on the fact that the number of substitutions is finite. Therefore, the results remain valid for any finite set of elements, objects or concepts that would satisfy [these rules]. […]

[8] The notes he took remained unblished untill 1981.

> We will keep the notations of the theory of substitutions because it is simpler, but we will also use the more general conception in what follows. [Dedekind, 1981, p. 63]

Yet, Dedekind took from Cayley the definition of a group and the idea that the elements could be anything; but he didn't keep Cayley's notations. Moreover, Dedekind wrote that he would use the notations of the theory of substitutions, which makes one expect that Dedekind would write tables of elements to represent the groups, as Galois did, or at least that he would follow the ideas that Cauchy had developed in that field in 1844. However, always used the single letter notation to represent the groups. In other words, he precisely chose the notation where the substitutions framework of the group concept was the thinner. Doing that, he actually erased any specificity that substitutions could provide to the group concept.

Moreover, this choice in symbolism had other consequences. As we have already seen in the case of Galois's research, it follows from the single letter notation that one can consider each group as one mathematical object, and not as a cluster of elements. In fact, using this single letter notation, Dedekind didn't do calculation *within* the group, but *with* the group. Just like Galois and Cayley, Dedekind took his inspiration from another mathematical field. But instead of transposing the procedures of algebraic calculation, he used tools coming from number theory[9]. In that context, and contrary to what Galois used to do, Dedekind didn't need a graphical representation to show that a given set was actually a group: he just needed to come back to the definition, and to prove that it was verified. In other words, he associated to Galois's single-letter notation a kind of practice of proof that Galois himself didn't use.

An example taken from Dedekind's manuscript illustrates very well how the mathematical practice associated to one notation can be transposed from one object to another. As a matter of fact, the single letter notation gave Dedekind the possibility to employ the tabular notation as a method of proof, just like Galois did, but, this time, the whole group played the same role as the elements in Galois's work:

> If one forms, under the same hypothesis that prop. V [K is a divisor of G], the following schema:
>
> $$K, \qquad K\theta_1, \qquad K\theta_2, \ldots \qquad K\theta_{h-1}$$

[9] For instance, he defines the "divisors" of a group, the greatest common divisor of several groups, and look for the consequences of these definitions, in terms of divisibility on the number of elements. This is also from the number theory (and more precisely from Euler, but I haven't managed to find exactly where in Euler's works…) that he justified a notation he would nearly systematically use in the proofs [Dedekind, 1981, p. 65]: $G=K+K\theta_1+K\theta_2+\ldots+K\theta_{h-1}$. In the same way, Dedekind combined this calculation on groups with reasoning inspired by number theory and questions of divisibility to prove the theorem II of the first part of Galois's *Memoir*, which explains what happens when one adjoins a quantity.

$$\begin{array}{llll} \theta_1^{-1}K, & \theta_1^{-1}K\theta_1, & \theta_1^{-1}K\theta_2, \ldots & \theta_1^{-1}K\theta_{h-1} \\ \theta_2^{-1}K, & \theta_2^{-1}K\theta_1, & \theta_2^{-1}K\theta_2, \ldots & \theta_2^{-1}K\theta_{h-1} \\ \ldots & & & \\ \theta_{h-1}^{-1}K, & \theta_{h-1}^{-1}K\theta_1, & \theta_{h-1}^{-1}K\theta_2, \ldots & \theta_{h-1}^{-1}K\theta_{h-1} \end{array}$$

> Then the sets of all the substitutions contained in any horizontal or vertical line is equal to the group G. [Dedekind, 1981, p. 66]

Thus, while Galois used this tabular representation to show how some elements could be combined to make a group, Dedekind uses exactly the same kind of table to show how some groups could be combined to make another one. With the single-letter notation, groups are manipulated just like if they were algebraic symbols. More precisely, Dedekind made with groups exactly the same thing that Galois had previously done with the *elements* of the group. He thus used a specific way of calculating, or maybe it would be better to say of manipulating, that he imported from Galois's work. He applied it to an object that he also took from Galois, but, in Galois's work, this object and this mathematical practice were not associated.

So, in Dedekind's case, this was not the notational part of the group concept that had been re-elaborated through the circulation process. On the contrary, Galois's original symbolism had been incorporated in a framework that goes from number theory to the idea that the right way to characterize an object is neither to write it nor to represent it, but to define it by advance with general properties that are suppose to show its "real nature". This may be the reason why Dedekind's reading of Galois text is often said to be more abstract than the ones of other mathematicians. But we should also remember that the manuscript with which historians work was written in the particular context of a seminar, which took place in Dedekind's office with only two students. This means that this text may not represent what actually happened during the lecture. Dedekind could have given a lot of further explanation by oral, just answering questions. The final text may appear to be so abstract because details, and in particular calculations, may not have been reproduced in it. Moreover, Dedekind's choice for proofs and notations could be linked to the knowledge and habits of his students. He could have adapted his lessons to them. In that case, Dedekind's reading of Galois' works would be not only correlated to Dedekind's agency and mathematical preferences, but also to the institutional environment in which it this seminar took place.

Conclusion

This case study of some of the notations that were used to manipulate groups shows that they can be linked to very different ways to think about these objects and to use them for proving theorems. Then, symbolism appears to be a good way to put light on the different images and practices of mathematics that are two often hidden behind the same category of "abstraction".

I also want to emphasize the point that symbolism has some kind of autonomy during the circulation of knowledge process: a mathematician may use the notation of another one without transposing neither the methodology of the original paper nor its theoretical framework. Nevertheless, this doesn't mean that this autonomy would be a transcendent property of mathematical symbolism. On the contrary, I would say that it strongly relies on the historical and social contexts where each new use of the original text happens.

BIBLIOGRAPHY

BABBAGE, C. (1815). An Essay towards the calculus of functions », *Philosophical Transactions*, vol. 105, p. 389-423.

BERTRAND, J. (1845). Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme, *Journal de l'École polytechnique*, vol. 18, 30e cahier, p. 123-140.

BEZOUT, E. (1781). *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la Marine, t. 1, Arithmétique,* Paris, P. D. Pierres.

BIGGS, N. L. (1981). T.P. Kirkman, mathematician, *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 13, p. 97-120.

CAYLEY, A. (1854). On the Theory of Groups as Depending on the Symbolic Equation $\theta^n=1$, *Philosophical Magazine*, 4th ser., vol. 7, 1854, p. 40-47, p. 408-409.

CRILLY, T. (2006). *Arthur Cayley. Mathematician Laureate of the Victorian Age*, Baltimore, John Hopkins University Press.

DE MORGAN, A. (1847). *Formal Logic of the calculus of Inference necessary and probable*, London, Taylor and Walton.

DEDEKIND, R. (1855). Bemerkungen zu einer Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, vol. 50, p. 268-271.

— (1981). Eine Vorlesung über Algebra ». In W. Scharlau, ed., *Richard Dedekind 1831-1981. Eine Würdigung zu seinem Geburtstag*, Brauschweig, F. Vieweg and Sohn, p. 59-108.

DURAND-RICHARD M.-J. (1996). « L'école algébrique anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance », dans Goldstein, C., Gray, J. and Ritter, J. (éd.), *L'Europe mathématique. Histoires, mythes, identités*, Paris, Éditions de la MSH, p. 445-477.

EHRHARDT, C. (2011a). Evariste Galois and the social time of mathematics, *Revue d'histoire des mathématiques*, 17 (2), p. 1-36.

— (2011b). *Evariste Galois. La fabrication d'une icône mathématique*, Paris, Editions de l'EHESS.

— (2012). *Itinéraire d'un texte mathématique. Réélaborations d'un mémoire de Galois au XIXe siècle*, Paris, Hermann.

GALOIS, E. (1997). *Ecrits et mémoires mathématiques. Edition critique intégrale de ses manuscrits et publications, par Robert Bourgne et Jean-Pierre Azra*, Paris, Jacques Gabay.

GOLDSTEIN, C. (1995). *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis, Presses Universitaires de Vincennes.

GOODY, J. (1977). *The Domestication of the Savage Mind*, Cambridge, Cambridge University Press.

HAMILTON, W. (1853), *Lectures on quaternions*, Dublin, Hodges and Smith.

KIRKMAN T. P. (1847). On a problem of combinations, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. 2, p. 191-204.

— (1860). On the theory of groups and many-valued functions, *Memoirs of the Literary and philosophical Society of Manchester*, 3th ser., t. 1, p. 274-398.

— (1860-1861). On the roots of substitutions, *Report of the British Association for the Advancement of Science*, 1860, p. 4-6 ; 1861, p. 4-6.

— (1862-1863). The complete theory of groups being the solution for the mathematical Prize Question of the French Academy for 1860, *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society*, vol. 3, p. 133-152, p.161-162.

LACROIX, S. F. (1807). *Éléments d'algèbre à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre-nations*, Paris, Courcier.

— (1825). *Complément des éléments d'algèbre*, Paris, Bachelier, 5th ed.

LAGRANGE, J. L. (1770). Réflexions sur la résolution algébrique des équations, *Mémoire de l'Académie royale des sciences et Belles Lettres de Berlin*, p. 205-421 [repr. in *Œuvres de Lagrange*, t. 3, p. 203-422].

— (1826). *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, Paris, Courcier, 3rd ed.

PEACOCK, G. (1830). *A treatise on Algebra*, Cambridge, Deighton.

POINSOT, L. (1826). Commentaire sur le livre de Lagrange », *Magasin encyclopédique*, t. 4, juill.-août 1808, p. 343-375 [repr. in Lagrange, 1826].

SERRET, J. A. (1850). Sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme», *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 15, p. 1-44.

SYLVESTER, J. J. (1861a). Note on the historical origin of the unsymmetrical six-valued function of six letters », *Philosophical Magazine*, 4th ser., vol. 21, p. 369-377.

— (1861b). Remark on the Tactic of nine elements, *Philosophical Magazine*, 4th ser., vol. 22, p. 144-147.

— (1861c). On a problem in tactic which serves to disclose the existence of a four-valued function or three sets of three letters each, *Philosophical Magazine*, 4th ser., vol. 21, p. 515-520.

— (1862). « Concluding Paper on tactic », *Philosophical Magazine*, 4th ser., vol 22, p. 45-55.

WUSSING, H. (1984). *The Development of the Abstract Group Concept*, Cambridge, MIT Press.

LA *TOPOLOGIE* DE JOHANN BENEDICT LISTING (1808-1882)
résonances dans quelques œuvres de contemporains[1]

Dominique FLAMENT
Archives Poincaré

RÉSUMÉ — La *Topologie* de Johann Benedict Listing (1808-1882) est encore peu connue de nos jours, lui l'est un peu plus pour d'autres réussites. Après avoir rappelé quelques éléments significatifs des deux écrits les plus considérables de son œuvre, ses *Vorstudien zur Topologie* (1847) et son *Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern* (1861), nous relèverons l'importance de cette discipline *quasi-mathématique*, qui introduisait et établissait le « qualitatif » en mathématique, au travers de ses résonances dans les œuvres de grands contemporains tels Arthur Cayley (1821 - 1895), Peter Guthrie Tait (1831 - 1901) et James Clerk Maxwell (1831 - 1879), pour terminer sur son influence singulière dans l'œuvre éclatée et encore aujourd'hui mal établie de Charles Sanders Peirce (1839-1914).

[1] La présente rédaction résulte de ma seconde conférence donnée, à l'occasion du *3° Encontro de História Conceitual da Matemática* (Brasil, SP, USP, Ubatuba, abril de 2012), à São Paulo, *Auditório Jacy Monteiro*, IME/USP, le 16 avril 2012.

C’est la confirmation d’une nouvelle voie qui s’affiche avec Listing. Singulièrement, outre son originalité bercée par des devanciers qu’il ne renie pas, Listing reconnaît volontiers l’influence du « plus grand géomètre du moment » sur l’orientation de ses recherches. C’est une « nouvelle science » qu’il nous invite à cultiver, une science « quasi mathématique » à découvrir dont l’utilité semblerait en partie déjà assurée[1].

Un maître éclairé

À Göttingen, dès le début des années 1830, Listing est un élève assidu de Gauss. C’est avec lui qu’il fera sa première instruction de *Geometria situs* et qu’il sera poussé à entreprendre des recherches en ce domaine où le maître a lui-même peu professé et peu publié.

On doit cependant reconnaître que l’intérêt de Gauss pour cette nouvelle matière n’est pas celui d’un engouement précoce et passager[2] : les rares traces écrites que l’on retrouve dans son œuvre[3] attestent qu’il développera des études qui impliquèrent une véritable connaissance et des réflexions approfondies en « topologie »[4].

Dès 1802, il faisait part à Olbers[5] de son attente fébrile, « avide » même, de la parution prochaine de la *Géométrie de Position*[6] de Lazare Carnot ; il parlait d’un « sujet presque complètement en friche » et des quelques « fragments » dus à Euler et Vandermonde.

---

[1] Gauss précisait en 1799 à propos de la „Geometrie de Lage“ (c’est l'expression qu’il utilise alors) que ses principes « ne sont pas moins valables que ceux de la géométrie des grandeurs… » (*Cit*. [Pont 1974*a*, 32]).

[2] Nous invitons le lecteur à se reporter à [Pont 1974*a*], notamment au § 3 (« Le rôle du prince des mathématiciens », p. 31-38), où sont rassemblés une partie des éléments qui témoignent de l'influence directe et indirecte de Gauss sur ce développement. Pont n’hésite pas à écrire que « Gauss se lia d’amitié avec *l’analysis situs* » dès 1794 (p. 33). Voir également son article [Pont 1974*b*] et celui de Breitenberger [Breitenberger 1993].

[3] Par exemple, on peut se reporter à ses articles posthumes publiés dans *Gesammelte Werke* : „[I.] Zur Geometria Situs“ (vol. VIII, p. 271-281), constitué de notes rédigées entre 1823 et les années 1840 ; „[II.] Zur Geometrie der Lage, für zwei Raumdimensionen“ (vol. VIII, p. 282-285), rédigé dans les années 1840. Voir également „Zur Electrodynamik“ (vol. V, p. 605, § [4.], 22 Jan. 1833).

[4] C’est le cas dans ses « Disquisitiones generales circa superficies curva » (8 Oct. 1827), *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiones*, vol. IV, Gottingae 1828 (Voir [*Werke*, V, 217-258 ; 341-347]), dans d’autres sujets de géométrie différentielle ou lorsqu’il détermine le nombre d'enlacements [die Anzahl der Umschlingungen] de deux courbes fermées ou infinies, un problème fondamental qu’il dit être à la frontière (*Grenzgebiet*) de la *Geometria Situs* et de la *Geometria Magnitudinis* „Zur Electrodynamik“, *Werke*, V, p. 605, § [4.], 22 Jan. 1833).

[5] Lettre du 21 novembre 1802 (D’après une nouvelle datation de Pont ([Pont 1974*a*, 32])).

[6] Voir [Gauss 1976, 103]. Contrairement à ce qu’il attendait semble-t-il, cet ouvrage ne traitait pas de « topologie ».

En 1825, il confiait à Schumacher[7] que la *geometria situs* était restée un « domaine presque complètement inexploré ». À plusieurs reprises, constant, il reviendra là-dessus en reprochant que depuis le « pressentiment » de Leibniz et le « faible regard » d'Euler et Vandermonde, on n'en sache « guère plus que rien »[8]. On peut poursuivre dans cette voie, accentuer un peu plus l'importance qu'attachera Gauss à toute cette matière, en rappelant que Sartorius von Waltershausen écrit dans sa biographie de Gauss : « il plaçait une espérance extraordinaire dans le développement de la *geometria situs* ». Mais, comme lui, il devait convenir qu'en dépit de ces premiers efforts elle était restée un champ « encore complètement inexploré que notre calcul actuel est inapte à gouverner »[9].

Il n'est pas difficile de reconnaître que Gauss a poussé Listing dans ces recherches délaissées et qu'il a exercé sur lui une influence effective : on retrouve chez cet élève, devenu collègue et ami, les mêmes sources, les mêmes références et parfois des avis et des formulations identiques. Cependant, une telle entrée en matière ne rend pas justice à Listing : elle le place sous un angle trop défavorable, tel le « sous produit » d'un Gauss perçu comme celui qui au cours du premier 19e siècle eut « la vision la plus profonde du rôle de cette science »[10]. Sans revenir sur l'évidence de cette influence considérable et marquante, il ne saurait être question de nier l'originalité de l'approche de Listing dans ce nouveau monde qui tardait à se révéler.

Un temps assistant de Sartorius von Waltershausen à l'occasion de recherches géologiques sur l'Etna, puis apportant son concours à l'optique physiologique[11], à la cristallographie et à la reconsidération de la *Philosophia botanica* de Linné, ce savant *inspiré* par Gauss, devenu grâce à lui professeur de Physique de l'Université de Göttingen[12], n'en fera pas moins valoir sa notable différence.

---

[7] Lettre du 30 octobre 1825 [Gauss *Werke*, V (1867), 400].

[8] „Schwachen Blick", „nicht viel mehr wie nichts". On retrouve ces déclarations datant du 22 janvier 1833 dans le *Carl Friedrich Gauss Werke* (vol. V, p. 605), mais le texte d'où elles sont tirées a d'abord été rendu public par James Clerk Maxwell (1831-1879) ([Maxwell (1873)1881, t. 2, 43]). C'est dans ce même *Traité* que sont évoqués les travaux topologiques de Listing.

[9] [von Waltershausen 1856, 88] (*Cit*. [Pont 1974*a*, 33]).

[10] C'est par exemple ce qu'écrit René Taton dans sa *Préface* à l'ouvrage de Pont ([Pont 1974*a*, ix]).

[11] On parle encore de nos jours de *loi* et d'*espace* de Listing.

[12] Il est d'abord nommé professeur de Mécanique à l'Institut des Arts et des Métiers de Hanovre (1837), avant de devenir professeur extraordinaire (1839), puis ordinaire (1847), de Physique à l'université de Göttingen.

Topologie

Le mot est ancien, il renvoie à la connaissance des lieux : à l'étude des formes d'un terrain et des lois qui les régissent, soit à l'étude géographique d'un lieu en relation avec son histoire, c'est un élément de la topographie ; à la connaissance des lieux communs, des sources où doit puiser un prédicateur[13]. Il désigna la branche de la botanique qui s'occupait des lieux des plantes. Il représentera également un procédé mnémotechnique d'association de la chose à ne pas oublier (par exemple, une idée abstraite) à un lieu ou une place connu (par exemple, un objet sensible familier, une idée concrète, etc.). La première trace reconnue d'une utilisation du mot dans un *sens mathématique* se trouve dans une lettre[14] de Listing adressée en avril 1836 à Johann Heinrich Müller (1787-1844). Mais la vraie entrée ne se fera qu'en 1847, dans les *Vorstudien zur Topologie*[15] :

> Sous le nom de *topologie*, nous devrons […] comprendre l'étude des rapports modaux [modalen Verhältnissen] concernant les formations spatiales ou des lois qui régissent la connexion [Zusammenhangs], la situation réciproque et la succession des points, des lignes, des surfaces, des corps et de leurs parties ou de leurs agrégats dans l'espace, abstraction faite de tout rapport de mesure et de grandeur[16].

Listing préfère cette expression à d'autres déjà existantes (*geometria situs*, *analysis situs*,…). Il écrivait en 1836 à propos de cette science que « Leibniz est probablement le premier à avoir pensé, mais seulement à avoir pensé, à son développement théorique »[17] ; il le réaffirmera plus tard en disant :

> Il semble qu'on puisse trouver pour la première fois l'idée d'un traitement spécifique et quasi calculatoire de l'aspect modal de la géométrie, dans des énoncés occasionnels de Leibniz, où il est question d'une sorte d'algorithme au moyen duquel on devrait pouvoir soumettre à l'analyse la situation des

---

[13] D'après le *Larousse du XX^e^ siècle* (article « topologie »).
[14] Cette lettre est entièrement reproduite dans [Breitenberger 1993].
[15] [Listing 1847].
[16] Voir [Listing 1989, 26]. Nous avons préféré dans un premier temps user de l'expression « rapports modaux », plutôt que de celle d' « aspects qualitatifs » proposée par Pont ; de même nous avons retenu le mot « modalité » plutôt que celui de « qualité » pour la traduction du mot „Modalität". Gauss parlait déjà de „Summe oder Aggregat" ; Pont préfère utiliser ici le mot « réunion ». Il va de soi que les choix de Pont sont, ou rejoignent, ceux de la « topologie » actuelle et paraissent mieux convenir à la conception d'une « géométrie qualitative » ; une expression que l'on retrouve sous la plume de Tait en 1883, de même que celle de "topology" ([Tait 1883, 82]). Cependant, ce parti pris d'historien qui est le nôtre, à l'avantage de nous placer au plus près des premières conceptions de Listing, ou d'autres.
[17] Lettre à Müller ([Pont 1974*a*, 41]).

> formations spatiales comme cela se fait au moyen de l'algèbre pour tout ce qui concerne la grandeur[18].

Dès 1836, il justifie son opposition à l'expression *Geometria situs* en précisant que « le terme de géométrie ne peut décemment caractériser une science d'où les notions de mesure et d'extension sont exclues ». L'expression « géométrie de position » suit le même chemin parce qu'elle est utilisée pour une autre discipline ; d'où la nécessité d'une nouvelle expression : « comme, finalement, notre science n'existe pas encore, je me servirai du nom, convenable me semble-t-il, de topologie »[19].

En 1847, le point de vue de Listing est inchangé : pour lui, la caractéristique géométrique de Leibniz « était essentiellement fondée sur le concept de congruence, *sans posséder pour autant de contenu modal proprement dit* »[20] ; et il revient à nouveau sur la nécessité de rejeter la dénomination *geometria situs* qui

> évoque le concept de mesure, qui est ici entièrement subordonné et crée une confusion avec le terme de 'géométrie de position'[21] déjà utilisé couramment pour une tout autre espèce de considérations géométriques[22].

De la même manière, tout autre expression existante est rejetée, dont celle de „Geometrie der Lage". Ce qui ne l'empêche pas d'admettre volontiers que la « nouvelle analyse géométrique » de Grassmann (« laquelle procède du spécimen leibnizien »[23]), le calcul barycentrique de Möbius et la géométrie de position de Carnot (rattachée à la « géométrie descriptive »[24] élaborée par Monge) sont « les seuls à pouvoir être considérés à proprement parler comme un enrichissement de la géométrie »[25]. À côté de ces derniers « trouvent tout à fait leur place ici »[26], la « résolution scientifique » réalisée par

---

[18] *Vorstudien*, p. 24. Il reprend ici en note un passage de la célèbre lettre de Leibniz à Huygens datée du 8 septembre 1679.
[19] [Pont 1974*a*, 42].
[20] *Vorstudien*, p. 24 ; c'est nous qui soulignons.
[21] En français dans le texte.
[22] *Vorstudien*, p. 25-6.
[23] *Vorstudien*, p. 24. Outre le fait qu'il connaît au moins en partie les œuvres de Grassmann et de Möbius impliquées dans ce domaine de réflexion, c'est bien sûr à l'article « Analyse géométrique » ([Grassmann 1847]) auquel il se rapporte ici (non pas à l'*Ausdehnungslehre* de 1844 ([Grassmann 1844]).
[24] En français dans le texte.
[25] *Vorstudien*, p. 24.
[26] *Vorstudien*, p. 25. En guise de contraste, nous pourrions rappeler ce qu'écrit Jean le Rond d'Alembert dans l'*Encyclopédie méthodique. Mathématiques* (tome troisième, chez Panckoucke, Paris, 1787), article « Situation » : « […] Leibnitz parle dans les actes de Leipsick d'une espèce particulière d'analyse, qu'il appelle *analyse de situation*, sur laquelle on pourroit établir une sorte de calcul. (…) Il seroit à souhaiter que l'on trouvât moyen de faire entrer la *situation* dans le calcul des problèmes ; cela les simplifieroit extrêmement pour la plupart ; mais l'état & la nature de l'analyse algébrique ne paroissent pas le permettre. (…) ». À propos de l'article d'Euler « *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis* », il écrit plus loin : « […] on ne voit dans ce mémoire rien qui ait rapport à l'analyse de situation dont nous parlons ; il s'agit seulement de savoir quel chemin on doit passer pour traverser des ponts disposés sur une rivière qui serpente, & les traverser de manière qu'on ne passe jamais deux fois sur le même. » (O)

Euler du problème du « saut du cavalier »[27] (très proche selon lui de la « géométrie de situation ») et les réflexions consacrées par Vandermonde[28] (notamment celles qui sont relatives au trajet que doit suivre un fil pour représenter une tresse ou les mailles d'un manchon).

Cependant, une fois ces quelques références rappelées, force lui est de constater une fois de plus que « la partie modale de la géométrie attend toujours son élaboration et son développement ».

Son propos est d'oser

> communiquer quelques éléments dans ces études préliminaires à la nouvelle science, et avant même que ces considérations puissent prétendre à une forme et à une méthode rigoureusement scientifiques, notre seule ambition est d'attirer l'attention, à l'aide de rudiments propédeutiques, d'exemples et de matériels, sur les possibilités et l'importance de cette science.

Enfin, ultime observation de son introduction, il insiste à nouveau sur le fait que

> [p]our atteindre au rang de science exacte auquel elle semble aspirer, la Topologie devra réduire les faits de l'intuition spatiale à des concepts les plus simples possibles, avec lesquels elle accomplira les opérations, quasiment comme en calcul, à l'aide de signes et de symboles appropriés et choisis par analogie avec ceux de la mathématique, selon des règles simples[29].

Le mot « topologie » proposé par Listing n'est pas immédiatement adopté ; c'est néanmoins en Allemagne que les choses évolueront le plus rapidement. Hilbert l'emploie au deuxième *Congrès International des Mathématiciens* (Paris, 6-12 Août 1900)[30]. Mais, en France ainsi qu'en Angleterre, il tardera à trouver la place qui lui est reconnue aujourd'hui. À la fin du 19e siècle, les mathématiciens français parleront encore d'*analysis situs* (Henri Poincaré [1899],...), parfois de *Géométrie de situation* (Jacques Hadamard[31] [1909]…). En Angleterre, James Clerk Maxwell (1831-1879) assure le

---

27 *Vorstudien*, p. 24-5. Il est significatif que Listing ne se réfère pas ici aux autres travaux bien connus d'Euler.
28 Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796), [Vandermonde 1772, 566].
29 *Vorstudien*, p. 25-6.
30 [Hilbert, 1902] ; en particulier, p. 96-7, il parle des « Problèmes de topologie des courbes et des surfaces algébriques ».
31 Ce « caractère d'indépendance vis-à-vis des déformations apportées à la figure est précisément celui qui va m'intéresser : les problèmes de géométrie qui le présentent constituent la *Géométrie de situation* ou *Topologie…* » (Leçon d'ouverture du *Cours de Mécanique Analytique et de Mécanique céleste*, faite au Collège de France le 18 mai 1909, intitulée « La Géométrie de situation et son rôle en mathématique », voir [Hadamard 1968, vol. II, 805-828], en particulier p. 813). Mais en un autre endroit il précise que « la géométrie de situation (ou encore *Analysis situs*) est une branche de la Géométrie dans laquelle on ne regarde pas deux figures comme différentes lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue, sans déchirure ni soudure » [« Notions élémentaires sur la géométrie de situation », ([Hadamard, vol. II, 829-871], p. 831). Il reconnaît beaucoup plus d'importance à Riemann qu'à d'autres : « …elle ne cessa pas d'être cultivée après [Euler] (…). Son importance au point de vue du développement de la

succès de Listing : dans son *Traité d'électricité et de Magnétisme* il résume une partie essentielle de ce qu'on lui doit et il reprend plusieurs des concepts développés par lui tout en insistant sur l'importance de sa contribution. Cependant, lorsque la nécessité se fait jour, c'est à une « Géométrie de Position » que Maxwell fait appel. Mais, tout en reconnaissant que c'est un sujet peu étudié, il signale que son traitement le plus complet a été donné par J. B. Listing[32]. Peter Guthrie Tait va dans le même sens : il consacre toute son "Introductory address to the Edinburgh Mathematical Society" (9 novembre 1883) à la *Topologie* de Listing[33]. Il n'admet pas l'utilisation du mot "Geometry", qui ne saurait convenir ici, mais il ne fera pas sienne l'expression de Listing pourtant si bien mise en valeur dans son discours introductif prononcé devant la Société Mathématique d'Edinburgh. Sa préférence est pour une *Science of Situation*[34]. Arthur Cayley (1821-1895) et Charles Sanders Peirce (1839-1914), bien que très largement instruits des travaux de Listing, n'y changent rien : le premier parle toujours d'*analysis situs* et ébauche une nouvelle théorie mathématique des "Partitions of a Close"[35] ; le second, remplace l'*analysis situs* par une "Topical Geometry" dont il entreprend un exposé systématique[36].

---

science mathématique tout entière ne devait cependant apparaître qu'au milieu du XIX^e^ siècle, avec l'œuvre de Riemann » (p. 813) ; « …quoi qu'il en soit, si frappante que fût la leçon qui se dégageait de la découverte de Riemann, cette leçon fut perdue. On peut dire qu'elle le resta jusqu'aux travaux de M. Poincaré » (p. 817). « …il y a topologie et topologie. Une foule de questions de même espèce ont été traitées tant par Euler lui-même que par nombre de ses successeurs ; elles ont leur place dans les recueils de récréations mathématiques et ne trouvent guère l'occasion d'en sortir. Seule, celle qu'a soulevée Riemann a la portée que nous venons de lui reconnaître dans ce qui précède. » (p. 824)

[32] [Maxwell 1954] ; en particulier §. 18], p. 17 ; voir également note * p. 17 ; §§. 18]- 23], §. 421]…

[33] [Tait 1884] "Listing's Topologie", *Philosophical Magazine*, (5) 17 (N° 103), Jan. 1884, 30-46 & plate opp. p. 80.

[34] « ...Pour cette branche scientifique il n'y a pas à présent de titre définitivement reconnu à l'exception de celui suggéré par Listing que j'ai par conséquent été obligé d'adopter. » C'est précisément ce qu'il fait dans le titre de son intervention en y insérant le mot allemand „Topologie". Mais plus loin, il en vient au mot anglais "topology" et justifie sa préférence : « Il n'est pas facile (en anglais du moins) de trouver un nom pour [cette science] sans en forger un à partir des racines grecques ou latines. *Topology* a une signification parfaitement définie, bien que sans lien avec le sujet. *Position*, avec nos mathématiciens du moins, en est venu à impliquer la mesure. *Situation* n'est pas encore autant définitivement associé à la mesure ; car on peut parler d'une situation à gauche ou à droite d'un objet sans chercher à savoir *de combien*. Ainsi, jusqu'à ce que meilleur terme soit conçu, on peut appeler notre sujet, dans notre propre langue, la *Science of Situation*. » ([Tait 1884] ; voir p. 86).

[35] Cayley fera un rapport sur le „Census der räumlicher der Complexen, oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern" (1861) de Listing devant la *London Mathematical Society* (Le 12 novembre 1868, p. 102, 104). Son article "On the Partitions of a Close" est daté du 8 mars 1861 ([Cayley 1861]).

[36] Dans l'œuvre magistrale de Ch. S. Peirce on trouve de nombreuses références à cette « Géométrie topique » ainsi qu'à ses relations avec le *Census* de Listing ; nous y reviendrons.

Aujourd'hui, de tous les mots créés par Listing[37], l'histoire n'a conservé que celui de « topologie ».

Vorstudien zur Topologie

C'est le premier ouvrage qui fait nommément figurer la topologie dans son titre. On le présente souvent comme très élémentaire et de peu d'importance. Mais ce jugement n'est cependant pas partagé par tous : on le sait, Maxwell n'est pas de cet avis, de même que son ami Tait à qui il l'aura fait connaître[38] et pour qui il s'agira de l'une des deux pièces maîtresses sur lesquelles repose toute la gloire de Listing[39].

Tait place l'auteur de ce « remarquable essai » parmi les premiers fondateurs de cette "Science of Situation" qui traite plus spécifiquement des relations spatiales qualitatives, et donc de celle qui en est un « exemple typique », la « théorie des nœuds »[40] :

> Listing's extremely valuable, but too brief, Essay (…) has long ago anticipated a very great deal of what I have lately sent to the Society.
>
> (…) Nothing can be clearer than Listing's statements on several parts of the subject: it is greatly to be desired that he had made many more.[41]

Ce texte, trente ans plus tard, fera progresser Peter Guthrie Tait (1831-1901) dans ses propres recherches et permettra de faire connaissance avec Listing[42].

Dans **son examen** des « formations spatiales » Listing est revenu sur les deux points de vue généraux que l'on pouvait alors distinguer : « la quantité et la modalité » ; son choix s'est délibérément porté vers celui qui avait toujours été jusque-là pratiquement délaissé, celui de la « modalité » ou considération de toutes les questions ayant trait à la « situation » et à la « succession ».

La première partie de son article s'ouvre naturellement sur le concept de « position » et, d'abord, par une considération préliminaire simple, « prise par analogie avec

---

[37] Dans [Müller 1900] ; on renvoie à lui pour le seul mot „Periphraxis", tout en oubliant qu'on lui doit aussi ceux de « topologie » (oder Gestaltenlehre (polyedrale Raumteilungen) [Analysis situs]) et de « Cyclose » (oder „cyclischer Zusammenhang" (von Raumelementen) [Complexe]), également présents dans ce *Vocabulaire mathématique* !

[38] Lettre de Maxwell à Tait datée du 22 janvier 1877, voir [Maxwell 2002, 446-447] ; dans sa lettre du 24 janvier 1877, il précisera le titre de ce texte de Listing [*Vorstudien der Topologie*] ([Maxwell 2002, n° 640, 448-449]), ajoutant : "I do not think Listing has cribbed very much from you nor will you bag much from him, but being a pioneer he ought to be honorably mentioned." (p. 448)

[39] "This paper, which is throughout elementary, deserves careful translation into English very much more than do many German writings on which that distinction has been conferred." ([Tait 1883, 83])

[40] [Tait 1883, 82]. Nous pourrions une nouvelle fois évoquer l'influence de Gauss, en rappelant l'existence (bien avant 1847) de son manuscrit „Zur Geometria Situs" essentiellement consacré à l'étude des nœuds.

[41] [Tait 1876-77] ; voir p. 306, p. 309 et p. 310.

[42] Voir les remarques datées du 11 avril 1877 faites par Listing sur l'article de Tait datées du 11 avril 1877 [Tait 1876-77, 316-17]).

la théorie combinatoire et s'appuyant sur le schéma des trois dimensions de l'espace » : chaque objet peut être affecté de trois droites se croisant à angle droit en son intérieur et à partir desquelles on peut différencier les uns des autres, ses dimensions et ses côtés.

Dans un souci de clarification, il emprunte l'exemple d'un dé de jeu ordinaire (dont les numéros de 1 à 6 sont répartis de telle façon que la somme de deux faces opposées soit toujours 7) : 0 est pris au milieu de ce dé ; on remplace les chiffres 1, 2, … par 1, 2, 3 , $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ respectivement, Deux corps, A et B, ainsi munis de leurs « signes de dimension », peuvent être alors disposés côte à côte ou bien l'un dans l'autre de telle façon que chacun des trois axes de l'un soit orienté de la même façon que chacun des trois axes de l'autre. « De telles dispositions peuvent être appelées (au sens étroit du terme) *positions* » (p. 27) : pos(A)B désigne la position de B par rapport à A ; pos(B)A, celle de A par rapport à B.

> La détermination topologique d'une position B par rapport à A se fait au moyen d'une forme comportant les trois chiffres 1, 2, 3, dans n'importe quel ordre et avec des signes quelconques, forme dans laquelle les trois chiffres indiquent, selon l'ordre choisi, ceux des trois côtés de B qui sont orientés de la même façon que les côtés 1, 2, 3 de A ou qui 'conspirent' [*conspirieren*] avec ces derniers. (p. 28)

Ce faisant, dans l'expression pos(A)B = $2\overline{3}\,\overline{1}$, ce sont les côtés 2, $\overline{3}$ et $\overline{1}$ de B qui coïncident avec les côtés 1, 2 et 3 de A, respectivement. Pour chaque position, les trois chiffres de la forme 1, 2, 3 sont également considérés comme *indices* ou « numéros » des places (p. 28). Une fois dressée la liste des quarante-huit formes possibles[43] grâce à ses notations, il en vient à concevoir à la place du point 0,

> un individu dont le sommet du crâne est orienté vers le point 1 et le visage vers le point 2, alors le point 3 se situera soit du côté droit, soit du côté gauche. La situation réciproque des trois axes de position est appelée, dans le cas où 3 se situe à droite, une position d'axe *droit* et dans le cas où 3 se situe à gauche, une position d'axe *gauche* […] (p. 29)

Suivent de nouvelles définitions :

> Deux positions d'axe droit ou deux positions d'axe gauche sont appelées deux à deux *homologues* ; une droite et une gauche, *hétérologues*.

Nous sommes dès lors autorisés à dire que :

> Deux corps admettent toujours vingt-quatre positions et vingt-quatre seulement. (…) Nous appellerons *positives* les vingt-quatre positions d'axe homologues, *négatives* les vingt-quatre positions d'axe hétérologues. (p. 29)

---

[43] Les orientations permises par les inversions droite-gauche et les permutations ; elles peuvent servir à symboliser les positions relatives de deux objets comme les dés.

Il s'intéresse à l'influence du signe d'un membre d'une position sur le signe de la dite position et remarque que la permutation des signes des membres d'une position laisse inchangé le signe de celle-ci, contrairement à la permutation des membres eux-mêmes. Il montre qu'« intervertir » [*invertieren*] une position donnée de B en A revient à dire qu'on fait dériver d'elle la position de A en B : « intervertir » pos (A)B = $\overline{2}\ 3\ \overline{1}$ donne pos (B)A = $\overline{3}\ \overline{1}\ 1$; partant de cette dernière, on retrouve la première position par simple inversion. Du concept d'inversion « découlent aussi les conditions par lesquelles une position reste inchangée par inversion, c'est-à-dire est *réciproque*. » (p. 31)

Il introduit le concept de « sommation de positions consécutives » : elle consiste en la « dérivation d'une position du dernier vers le premier dans la série des éléments auxquels se réfèrent les positions données » (p. 33). Ainsi, la somme des positions consécutives pos(A)B, pos(B)C, pos(C)D et pos(D)E, est « symboliquement » exprimée par la relation :

$$\text{pos}(A)B + (B)C + (C)D + (D)E = \text{pos}(A)E.$$

Une première illustration exemplaire de ce qu'il venait d'établir assez laborieusement sur les positions (rappelons qu'il ne disposait pas encore de tous les concepts de la théorie des groupes), fait appel au « rapport de situation entre des objets et leurs images catoptrique et dioptrique ». Dans une expression telle que « pos(A)B », A en vient à signifier l'objet corporel placé devant un miroir plan et B est alors son image dans ce miroir : suivant l'axe retenu perpendiculaire au plan du miroir, pos(A)B prendra l'une des trois formes $\overline{1}23$, $1\overline{2}3$, $12\overline{3}$. D'où une première constatation :

> En dehors des rapports géométriques, c'est-à-dire considéré d'un point de vue purement topologique, cela vaut aussi bien pour les images virtuelles engendrées par des miroirs convexes […] que pour les images virtuelles engendrées par des miroirs concaves. (p. 38)

Et de conclure qu'il en va de même avec les miroirs concaves-convexes (*difflexes*). Le symbolisme de Listing a aussi l'avantage de simplifier l'explication des « simulacres d'images »[44].

> Ces considérations, si élémentaires soient-elles, peuvent servir à constater avec une plus grande précision et en vue de leur usage scientifique, le sens de certaines expressions topologiques qui manquent de précision dans le langage de la vie courante. (p. 9)

Une nouvelle distinction est précisée : entre *inversion* [*Umkehrung*], soit le cas où deux dimensions sur les trois s'inversent simultanément par un demi-tour, et *perversion*

[44] En note Listing précise à propos de ces images : « D'un point de vue optique, elles sont pour ainsi dire simultanément virtuelles et réelles. » (*i. e*, elles sont dans une des positions positives $12\overline{3}$, $\overline{1}23$, $1\overline{2}3$) [p. 38].

[*Verkehrung*], le cas où il n'y a qu'une seule dimension inversée[45]. Lorsque les trois dimensions sont inversées, il parle de corps *simultanément perverti-inversé*[46]. Cette distinction est immédiatement mise à profit dans l'étude des images de nombreux instruments optiques (tels les télescopes, microscopes, projecteurs, …).

La seconde partie, *De l'hélicoïde*[47], ouvre sur une transition de la position au nœud.

> L'hélicoïde est une ligne à deux axes de courbure, qui peut être considérée comme le trajet d'un point se déplaçant dans l'espace simultanément de façon cyclique et progressive. (p. 47)

Donner au concept toute la généralité qui convienne aux considérations topologiques, amène Listing à définir la « ligne cyclique », ou *boucle*, comme étant « la circonférence de toute figure plane quelconque, à condition que son périmètre ne se croise nulle part lui-même et ne possède pas non plus de points multiples. » (p. 47)

Un point quelconque à l'intérieur de cette surface « encerclée » devient le centre de la boucle (pour simplifier on prend alors son « centre de gravité », que l'on désigne par 0) ; les extrémités d'un diamètre (passant par 0) sont désignées par 1 et $\overline{1}$, celles d'un autre diamètre (« quelconque ou si l'on préfère, perpendiculaire au premier » [p. 48]) le sont par 2 et $\overline{2}$. Une perpendiculaire étant tirée en 0 au « plan circulaire », tout point situé à « l'endroit » du plan est désigné par 3, par $\overline{3}$ lorsqu'il est situé à son « envers ». Tenant compte d'une « progression continue » de 0 (soit d'une translation qui va définir un chemin quelconque appelé par lui le *trajet* ou la *conductrice* de la boucle), Listing ajoutera 4 et $\overline{4}$ à cette première désignation positionnelle analogue à celle qui précède, suivant que l'on se rapproche, ou s'éloigne, d'un point pris sur la directrice en question. Enfin, il relève que :

> Le trajet du point qui décrit l'hélicoïde et par conséquent l'hélicoïde lui-même, est caractérisé topologiquement de la manière la plus simple par la combinaison des dénominations choisies pour les deux mouvements.

Par exemple, poser (12)3 revient à désigner l'hélicoïde décrit par un point se déplaçant cycliquement dans le sens de 1 vers 2, et progressivement vers 3 (p. 49).

---

[45] *i.e.* le résultat de la réflexion dans un miroir plan.

[46] p. 40. En note, il illustre ces distinctions par les exemples suivants : « Un homme, sur la rive opposée d'une eau dormante, apparaît dans le miroir de l'eau en position pervertie, alors qu'à travers un télescope astronomique, il serait inversé ; quoique les deux images montrent la tête dirigée vers le bas et les pieds vers le haut, dans le cas du dioptrique, on verrait le cœur, si on pouvait l'examiner, à gauche comme dans l'original, et au contraire du côté droit dans le cas du catoptrique. On peut distinguer dans l'écriture une lettre inversée d'une lettre pervertie. Le V latin inversé donne un Λ ; le R latin donne quant à lui un Я cyrillique par perversion ; un L latin perverti et inversé donne un Γ grec. » En un autre endroit, il présente la perversion comme désignant l'effet de changer un nœud quelconque en sa propre image dans un miroir plan.

[47] „Der Helikoïde oder Wendellinie".

La remarque suivante est particulièrement intéressante et mérite d'être relevée :

> On peut aisément concevoir que des variétés de configuration de la conductrice ou de la ligne cyclique, mais aussi bien des changements de forme et de situation de celles-ci, ainsi d'ailleurs que des variations dans la vitesse et des changements de la vitesse du mouvement cyclique ou encore du mouvement de translation du point engendrant l'hélicoïde, n'entraînent dans l'hélicoïde, et ce, quel que soit le nombre de ces variations, que des différences de niveau de la suite de chiffres du type mentionné ci-dessus, et peuvent donc être considérés pour l'instant comme essentiellement géométriques. De même l'inversion du sens des deux mouvements par laquelle le point placé sur le trajet hélicoïdal devient rétrograde, n'entraîne qu'une différence phoronomique, qui fait que nous pouvons considérer comme topologiquement équivalents les trajets engendrés par (1 2)3 et par (1 2) $\overline{3}$. Seule l'inversion du sens d'un seul des deux mouvements associés ou, ce qui revient au même, l'échange entre position d'axe droit et d'axe gauche lors de la détermination des points 1 et 2 sur la circonférence de la boucle avec maintien des mêmes symboles, est susceptible d'engendrer une modification topologique de l'hélicoïde. (p. 49-50)

Selon que la boucle est en position d'axe droit ou en position d'axe gauche, on utilise une forme de type (12)3 ou de type [12]3. Ce faisant, les quatre-vingt-seize formes hélicoïdales distinctes se décomposent d'après leur *type de torsion*, suivant ces deux espèces de forme, dont (12)3 et [12]3 sont des représentants, en *dextrogyres* ou *dexiotropes* et en *lévogyres* ou *laeotropes*, respectivement (p. 51). Listing revient longuement sur l'usage courant que l'on fait de ces dénominations : notamment dans le domaine technique, à propos des dénominations de « droite » et de « gauche » des vis et de leur extension aux torsions en forme de vis (engrenages de montres, les ailes des moulins à vent, l'hélice des bateaux, la pompe en spirale, la vis d'Archimède, les escaliers en colimaçon, les colonnes torses et autres ornements architecturaux en forme de vis, le ressort à boudin, les ressorts des chronomètres… Il n'exclut pas le retordage et le nattage, « les lisses ou fils entrant dans la fabrication des cordes, des cordons et des guimpes »…). Une telle distinction est également discutée en conchyliologie (elle est « de tout premier intérêt pour l'étude de la morphologie des escargots » [p. 53]…) et en botanique.

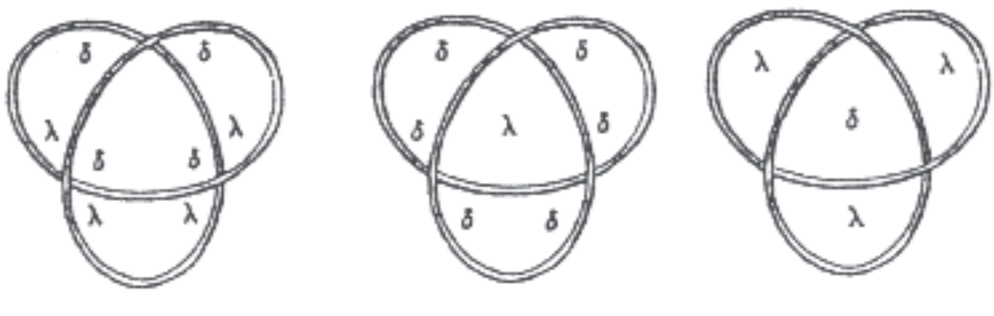
Laissons ici de côté les cas plus difficiles considérés par la suite qui concernent les hélicoïdes *doubles* ou *multiples* (les dits « hélicoïdes d'ordre supérieur »), mais notons cependant qu'ils conduisent Listing à un cas plus élémentaire dont le rôle est essentiel pour les « complexions linéaires » dans l'espace, et à un moindre degré pour les « complexions planes » :

> […] l'étude topologique des formations quelconques dans l'espace doit désormais être le plus souvent à leur projection sur une surface – plane ou

> sphérique – où les lignes projectives, encore appelées rayons, sont supposées être, pour le dire de la façon la plus générale, homocentriques, c'est-à-dire parallèles, ou si on les prolonge suffisamment, supposées passer par un point commun : l'œil de l'observateur. Dans de telles représentations en deux dimensions, une distinction de la situation relative des différentes parties de corps, de plans ou de lignes qui possèdent des points d'image communs s'avère nécessaire pour reconnaître les objets qui se recouvrent mutuellement dans l'image comme telle, et en tirer leurs positions relatives et leurs distances par rapport à l'œil de l'observateur sans avoir à recourir à d'autres projections. Les règles habituelles du dessin offrent des moyens suffisants pour atteindre ce but dans la représentation des corps et des plans, de même pour les lignes lorsqu'il s'agit de représenter des corps linéaires dans l'espace (tiges, fils, ficelles, etc.) (p. 66-7)

Les conventions de représentation qui sont faites par Listing lui permettent de distinguer plus facilement qu'auparavant la nature d'un « croisement » [*Kreuzeug*] dans un dessin projeté sur un plan : de savoir si l'on a affaire à un « surcroisement » [*Uberkreuzung*] ou à un « entrecroisement » [*Durchkreuzung*][48]. Il appelle « point nodal »[49] le point d'intersection qui résulte de la projection d'un surcroisement sur un plan.

Laissons également de côté la méthode défectueuse, déjà très bien analysée par Tait[50], qui devait permettre à Listing, une fois désignés par les symboles λ et δ les espaces angulaires produits par un surcroisement, de distinguer effectivement des « complexions linéaires » comme les suivantes qui, projetées, sont identiques.



À partir d'elles, Listing se pose plusieurs problèmes intéressants, dont celui de la « réduction » : la première complexion ci-dessus peut être réduite à un simple anneau non noué avec disparition des croisements ; dans les deux autres le nombre de croise-

48 Ainsi, par exemple dans le cas de fils, un « surcroisement » suppose l'existence d'un fil en dessous ou au-dessus de l'autre dans l'espace ; dans un « entrecroisement », on a un point d'intersection dans l'espace.

49 *Ibid.*, p. 68.

50 [Tait 1876-77, 306-317]. Voir également [Turner & van de Griend 1996, 213-219].

ments ne peut être réduit « par transformation ». La première forme est dite « réductible », les deux autres « réduites ». Listing observe que ceci est « étroitement lié au fait que dans les deux dernières figures, toutes les parcelles sont monotypes ; en revanche, dans la première figure, une seule (l'anse inférieure) est monotype ; les autres, amphitypes » (p. 69). C'est à cette occasion que l'espace « extérieur » est pour la première fois pris en considération comme « parcelle indépendante » (*amplexum*).

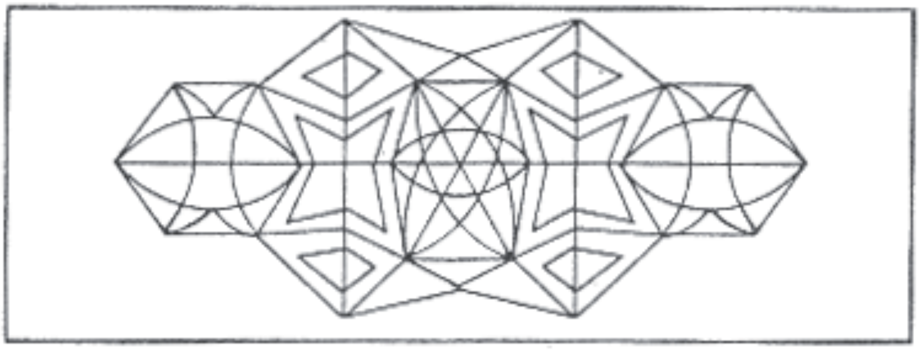
Son long mémoire se poursuit par une esquisse de « quelques autres secteurs de la topologie dont l'approfondissement sera réservé à des occasions futures » (p. 74). Listing évoque ainsi les complexions linéaires, « c'est-à-dire des lignes quelconques, droites ou courbes, des agrégats de telles lignes » (p. 74)[51] et montre que :

> Une complexion linéaire peut être considérée dans sa totalité comme l'agrégat d'un nombre déterminé de traits continus, dont chacun possède deux points terminaux ou points d'extrémité qui sont situés sur des points de réunion d'un nombre impair de lignes. (p. 75)

D'où il déduit un nouveau type de problème :

> Donner, pour chaque complexion déterminée, fût-elle la plus embrouillée, le nombre minimal de traits continus par lesquels on peut la décrire, à condition qu'aucune partie n'en soit parcourue plus d'une fois. (p. 75)

Parmi les exemples cités figurent celui des quatorze traits nécessaires pour la grille d'un échiquier de soixante-quatre cases et celui de la figure suivante, dû à Clausen, que l'on peut dessiner d'un seul trait[52] :



---

[51] „Linearcomplexionen, d.h. beliebige gerade oder krumme Linie oder Aggregate solcher Linien, können in Einer Fläche – Ebene oder Kugelfläche – enthalten sein, oder aber den Raum“ in jedweder Richtung durchsetzen.“ (p. 59)

[52] Elle ne possède que deux points « impairs » : les deux points de réunions de cinq traits à chaque extrémité de l'axe horizontal.

D'autres tâches attendent encore cette *Topologie*, notamment celle d'entreprendre « le regroupement d'un certain nombre de nœuds différents, en usage par exemple dans l'artillerie, le génie, la marine, le tissage ou les nœuds utilisés ailleurs » (p. 80).

Pour la suite de son travail, Listing annonce que les précédentes considérations sur la position devront être élargies aux cas où le nombre des axes positionnels est supérieur à trois, et qu'il devra être tenu compte de la *situation* : « c'est-à-dire [de] la position des lignes droites qui relient les éléments entre eux. » À ces recherches topologiques futures, il faut associer celles qui porteront sur la « *symétrie* de l'espace et du mouvement », un sujet qu'il considère comme fécond :

> La symétrie échoit moins aux ressorts de la géométrie qu'à ceux de la topologie. Les lois de la symétrie jouent un rôle essentiel, d'une part dans la morphologie des êtres organisés, et d'autre part en cristallographie tout particulièrement[53].

On peut comprendre, après coup, en dépit de déclarations qui paraissent prophétiques, qu'un lecteur moderne tout occupé par la seule « préhistoire » de la topologie n'ait pas voulu accorder une grande importance à ces « études préliminaires ».

En revanche, il en va tout autrement avec le second écrit de Listing ; il est sans doute plus familier et plus en accord avec ce que nous voulons reconnaître et retenir aujourd'hui comme étant du ressort de la « topologie ».

[53] *Ibid.*, p. 81. D'où l'importance dans un tel contexte qu'accorde Listing au célèbre traité de cristallographie de W. H. Miller ([Miller 1839]).

Cens des complexes spatiaux ou généralisation du théorème d'Euler sur les polyèdres[54]

Le titre de cet article nous ramène directement au développement précédent sur le théorème d'Euler, dont la généralisation réussie fera parfois parler de « Théorème de Listing » ou encore de « Théorème du Cens ». De plus, cette généralisation est d'emblée présentée, à côté du « recensement des complexes », comme l'un des principaux objectifs visés. Paradoxalement pour nous, Listing retient entre plusieurs formulations du titre de cet écrit fondateur celle où ne figure pas le mot *Topologie*[55]. Ce n'est pas la seule « surprise » qui attend un lecteur moderne : Listing ne dit rien à propos des travaux de Riemann[56]. Pour ajouter à la confusion, on pourrait relever le fait que Listing connaît l'auteur et son œuvre : Riemann sera un temps participant de son séminaire et son plus proche voisin pendant quelques années lorsque qu'il occupera le second logement gratuit de l'observatoire de Göttingen (dès mai 1858[57]) ; enfin, Listing tient à se rapporter dès les premières pages de son *Census* à ses prédécesseurs les plus influents. Il faut peut-être voir dans cette façon d'agir une intention délibérée de la part de Listing de mettre en avant la portée restreinte annoncée de ce nouvel écrit, une fois comparée à la

[54] [Listing 1861]. Ce long mémoire (de 84 pages et de 65 figures en deux planches) a été réédité en livre de poche par l'Université du Michigan (en allemand, dans les *Reprints from the collection of the University of Michigan Library*, le 27 avril 2009), de même que plus récemment les *Vorstudien zur Topologie* (Nabu Press, le 16 mars 2010). Pour le choix du mot *Cens*, on trouve dans [Müller 1900] les traductions suivantes : « Census oder Schätzung [Praktisch Arithmetik] : *Cens* » et « Census räumlicher Gebilde [Ausdehnungslehre] : *Cens des figures de l'espace* ». Ce mot renvoyant selon ses propres critères à une taxinomie. À ce propos, nous retiendrons que le *Trésor de la Langue française informatisé* (TLFi) traite de la « taxinomie (taxonomie) comme d'une « science des lois et des principes de la classification des organismes vivants ; *p. ext.*, science de la classification », d'une « classification d'éléments ; suite d'éléments formant des listes qui concernent un domaine, une science. » Listing écrit aussi, à propos du rôle échu à son *Attribut* : „Durch das Attributiv wird dem numerativen Element des Census gleichsam ein taxatorisches hinzugefügt.“ ([Listing 1861, §. 37, 153]).

[55] Aujourd'hui, des 31 mots qu'il introduisit pour la circonstance dans sa discipline « quasi-mathématique », outre quelques deux ou trois autres mots que l'on retrouve dans d'autres domaines, c'est le seul qui ait subsisté et dont on lui reconnaît la paternité.

[56] Rappelons que le *Larousse du XX*^e^ va jusqu'à définir, abusivement, la topologie comme « branche de la géométrie édifiée par Riemann et dans laquelle on étudie les propriétés de l'espace, ces propriétés étant qualitatives seulement et toute idée de mesure étant écartée. (Article « Topologie »)

[57] Breitenberger s'interroge sur leur relation, sur « pourquoi ces deux hommes ne découvrirent jamais combien ils avaient à se dirent l'un à l'autre » [Breitenberger 1999, 919] ; mais il se limite à l'évocation de certaines des différences qui auraient pu expliquer cette « énigme » : à un Listing « maniaco-dépressif léger qui la plupart du temps de sa vie d'adulte a oscillé entre des dispositions d'esprit opposées » (p. 911), mal marié et père de deux filles (l'une née en 1848, l'autre en 1849), « expansif », dont il compare le style d'activité à celui d'un « assidu collectionneur de timbres » (p. 919), « traînassant » à l'excès sur les détails, qui avait cependant reconnu très tôt le génie de son voisin qu'il connaissait bien (p. 918), il oppose un Riemann qui partage comme lui de réelles difficultés économiques, tuberculeux (contagieux, [p. 919]), en charge de ses sœurs, timide, un « artiste créatif », qui va droit au cœur des choses, qui préfère toujours l'expression *analysis situs* à celle de *Topologie*.

généralité de la *Topologie* décrite dans les propos introductifs de ses *Études préliminaires*. Le mot *Cens*, entendu tel « la relation entre le nombre de points, lignes, surfaces et espaces [solides] du complexe et des attributs de ses composants »[58], est sans doute préférable à celui de *Topologie*[59] dès lors que ne seront posés que des problèmes de *généralisation du théorème d'Euler* et de classification subséquente de *Complexes spatiaux*. Fort de cette distinction, on pourrait comprendre l'absence de référence à l'œuvre pionnière de Riemann, dont les intérêts les plus immédiats diffèrent de ceux mis en avant dans le *Census*.

Il n'est donc pas étonnant que J. C. Pont tienne dans son ouvrage sur la préhistoire de la topologie algébrique à faire figurer chronologiquement Listing avant Riemann, dès lors que le premier déclare d'emblée vouloir poursuivre dans la voie concernée par le théorème d'Euler sur les polyèdres, où s'illustrèrent Legendre, Cauchy, Lhuilier[60], et plus récemment Cayley (et bien d'autres qu'il serait vain de tous rappeler ici). Cependant, Listing fait aussi figure d'homme de transition, car tout en se revendiquant de cette filiation conceptuelle il veut s'en démarquer dès les premières pages de son *Census* en insistant sur sa propre différence. Ce faisant, il franchit une nouvelle étape en montrant que le théorème, objet de très nombreuses attentions et de multiples généralisations depuis les derniers efforts de Euler, est aussi l'affaire de sa *Topologie* ; affaire d'*analysis situs*. Sa réussite est évidente, plusieurs de ses contemporains et successeurs, non des moindres, en témoignent : ils se rapporteront à son œuvre et en feront une large publicité ; nous y reviendrons. C'est donc dire que Listing est en son temps un savant reconnu, dont l'œuvre est respectable ; il n'est pas usurpé de reconnaître en lui, ainsi que le fait notamment encore de nos jours J. C. Pont, un précurseur en cette ma-

---

[58] „Die Relation zwischen der Anzahl von Punkten, Linien, Flächen und körperlichen Räumen der Complexe und den Attributiven ihrer Bestandtheile" ([Listing 1861, 181]). Voir Art. 37. Pour l'*attribut*, „eine aus den Modalitäten der Cyklose, der Periphraxis und der unendlichen Ausdehnung abgeleitete Zahl", voir p. 153-4.

[59] Cependant, sa *Topologie* est bien présente et il ne se privera pas de s'y rapporter, parfois simplement de l'évoquer, à plusieurs reprises tout au long de son mémoire. Ainsi, par exemple prises parmi d'autres, on la retrouve dans des expressions telles que „*topologischen Eigenschaften*, d. i. solchen abhängt, die sich nicht auf die Quantität und das Maas der Ausdehnung, sondern auf den Modus der Anordnung und Lage beziehen." (p. 109), ou encore „Wenn aber in gewissen Gebieten geometrischer oder topologischer Analyse die Constituenten mit anderen von neuen Modalitäten abhängigen Numerativen ausgerüstet werden (s. beispielsweise Vorstudien S. 870)..." (p. 180), etc. Précisons que Listing proposera aussi des cours de topologie, mais c'est bien encore nommément d'*analysis situs* qu'il traitera. On notera cependant qu'il existe une différence entre ces vocables, nous y avons fait allusion précédemment ; on en retrouve encore trace dans le *Vocabulaire* de Felix Müller : « topologie [analysis situs] : *Topologie* » ; «Topologie oder Gestaltenlehre (polyedrale Raumteilungen) [analysis situs] : *topologie* ».

[60] Avec Lhuilier le « polyèdre » a déjà changé de nature ; c'est bien d'abord dans ce changement aussi que s'inscrit l'approche de Listing qui par la suite débordera considérablement celle de Lhuilier.

tière digne de figurer au même titre qu'un Euler ou un Riemann au rang de ceux qui donnèrent des « béquilles »[61] à la topologie.

Le Théorème d'Euler est bien au cœur de son étude, dont le point culminant sera le dit *Théorème de Listing* (ou du *Cens*). Mais l'approche de Listing ne s'inscrit pas dans les extrêmes d'un E. de Jonquières[62], elle se démarque aussi de la seule quête de contre exemples conçus pour invalider une précédente démonstration, notamment celle particulièrement réussie d'un Lhuilier, qui l'anticipe et dont il tire de réels enseignements. Ce qui intéresse le plus Listing dans ces successives corrections d'« erreurs » du théorème d'Euler, ce ne sont pas tant, écrit-il, les méthodes appliquées que les généralisations, les élargissements [die Erweiterungen] eux-mêmes de ce théorème.

L'élargissement qu'il propose à son tour est de loin le plus considérable : non seulement, se limitant aux seuls polyèdres, il étend la proposition d'Euler, mais avec l'introduction d'un nouvel objet mathématique, le *complexe spatial*, il ira beaucoup plus loin ramenant cette proposition ainsi étendue à un simple cas particulier d'un théorème autrement plus général. Une généralité qui a bien sûr des exigences plus accentuées[63], outre celle de ne plus pouvoir s'en tenir à une *intuition* qui semblait alors convenir et suffire à tous dans le cas du polyèdre à l'heure d'en considérer les « sommets », les « arêtes » et les « faces » : elle imposera un autre dépassement lorsqu'on lui préfèrera le *complexe spatial*.

> Dans un premier temps, nous entendons par complexe spatial toute configuration de points, de lignes et de surfaces dans l´espace, les lignes et surfaces pouvant être droites ou courbes, ouvertes ou fermées, limitées ou illimitées, tous les éléments devant toutefois être liés les uns aux autres pour être considérés comme UN complexe[64].

Cette nouvelle entité qui divise « parfaitement ou imparfaitement » l'espace illimité dans lequel elle est plongée, et dont les parties sont « complètement ou partiellement limitées »[65] d'une manière quelconque, accentue l'importance qu'il y aura à déterminer ses *frontières*[66] et les relations entre ses *constituants*.

---

[61] [Pont 1974*a*]. Il reviendra à un autre élève de Gauss de lui donner des « ailes ».

[62] [Jonquières 1890].

[63] « Plus la généralité visée est grande et plus les concepts de départ devront être rigoureusement définis, si l'on ne veut pas courir le risque de perdre en précision ce que l'on a gagné en généralité. » Trad. [Pont 1974*a*, 45]

[64] „Unter einem *räumlichen Complex* verstehen wir vorerst jede beliebige Configuration von Punkten, Linien und Flächen im Raume, die Linie und Flächen mögen gerade oder krumm, offen oder geschlossen, begrenzt oder unbegrenzt sein, nur dass alle die Elemente unter sich zusammenhängen müssen, um zu Einem Complex gerechnet zu werden.“ ([Listing 1861, 100-101]).

[65] ([Listing 1861, 99].

[66] Pour reconnaître plus facilement la nature et la constitution (à partir des constituants des curies inférieures) de la frontière de l'objet considéré, Listing va créer une nouvelle écriture symbolique (Voir ([Listing 1861], « 6. De la

Une première observation, résultante de l'approche de Listing, est pour constater que l'ancienne formule d'Euler (par exemple, $s + f - a = 2$, où s, f et a sont respectivement le nombre de *sommets*, de *faces* et d'*arêtes*), peut être lue autrement ; sous la forme $s - a + f - 2 = 0$ elle mettait non seulement un terme au « mystérieux 2 » dont parlait Tait[67], en faisant de lui le nombre d'espaces : l'espace circonscrit par le polyèdre, ou son *intérieur*, et l'espace infini qui de toutes parts limite le polyèdre, son *extérieur*, que Listing appelait l'*Amplexum* et qu'il considérait déjà comme une « parcelle indépendante » dans ses *Vorstudien*[68]. Elle est aussi pour constater que, dans une première étape de cette nouvelle approche, les éléments en question, « plus précisément définis », et les complexes qu'ils composent, seront d'abord comptés comme dans la proposition d'Euler, étendue à points, lignes, surfaces et espaces, venus substituer sommets, arêtes et faces. Mais, le « théorème général » escompté ne nécessite pas seulement le nombre de chaque genre d'éléments dans cette relation qui les rassemble :

> […] Il va s'avérer que le théorème ne rend pas indispensable le seul nombre de chaque type d'élément, mais implique pour chaque élément une modification numérique, en conséquence de quoi la proposition ne repose pas immédiatement, mais bien de manière indirecte sur un *dénombrement* et, pour ainsi dire, consiste en un cens fixé selon certaines classes à l'intérieur de chacune des catégories d'éléments.
>
> […] Ce point est si important et omniprésent dans la généralisation, que je n'ai pas hésité à intitulé le théorème 'cens' des complexes spatiaux[69].

C'est dans cette recherche, où sa *Topologie* prendra le maître mot, que s'imposera enfin la prise en compte effective de la nature « topologique » de chaque constituant du complexe, d'où résulteront des termes supplémentaires, des *attributs* qu'il ne sera pas toujours aisé de déterminer parce qu'ils mêlent dimension, connexité et extension à l'infini, où viendront s'y fondre *cycloses*, *périphraxises*[70], elles-mêmes précédées d'une abondance de clarifications développées sur plus de 70 pages, avant de parvenir à l'énoncé du *théorème fondamental* :

---

frontière » [Von der Begrenzung], p. 11-12 et p. 107-108). Ainsi, il désigne respectivement les constituants des curies par les chiffres 1 (les points), 2 (les lignes), 3 (les surfaces) et 4 (les solides) ; dans la suite ordonnée que propose cette écriture symbolique, le premier nombre désignera le constituant limité [begrenzte Element], les suivants seront ceux qui limitent. Par exemple, on aura [20] pour désigner une ligne fermée sans points effectifs (zurücklaufende Curve oder Ringlinie ohne effective Punkte), [300] (rundum geschlossene Fläche ohne effective Linien oder Punkte), [4000] (den ganzen unbegrenzsten Raum, wo die Zahl p der Complexe Null ist). On pourrait rajouter à ces exemples ceux que donne Pont : (4301) l'espace intérieur d'un cône et (4321) l'espace intérieur à un polyèdre usuel.

67 [Tait 1883, 84].

68 [Listing 1847, 55].

69 [Listing 1861, 99].

70 [Listing 1861, 181].

> Dans tout complexe spatial donné, la somme des quatre nombres de participants munis de signes alternés, composés des points, lignes, surfaces et espaces existants, qui dans chacune de ces quatre curies sont formés des parties constitutives et des attributs déterminés à partir des modalités de cyclose, de périphraxise et de l'étendue à l'infini, est égale à zéro. (§ 44, p. 173)

Bien des étapes devront être franchies pour obtenir la formule suivante et comprendre toute la richesse conceptuelle que ne laisse deviner d'emblée l'apparente simplicité de l'« agrégat algébrique » résultant :

$$A–B+C–D = 0\ ;$$

le plus général, qui réunit les nombres de constituants respectifs : sont désignés positivement ceux de dimension paire (points et surfaces), les autres (lignes et espaces) le sont négativement. En effet, pour y parvenir il faudra d'abord comprendre ce que sont devenus nos usuels points, droites, surfaces et espaces, rassemblés en *curies*[71], définir ceux qui sont *effectifs*[72], qui seront pris en compte dans cette formule, comprendre ce qu'est la frontière du complexe considéré dans sa plus grande généralité, et créer une écriture symbolique qui identifiera immédiatement la nature de sa composition ; il faudra détourner de son usage usuel un vocabulaire pris d'autres disciplines, ou le créer, pour désigner le plus justement possible des opérations, des êtres géométriques nouveaux, des situations et des outils qui permettront de dénouer toute la complexité des objets considérés et entreprendre leur classification. On comprendra pourquoi Listing accorde dans son approche une place aussi importante au concept de *connexité* (déjà présent dans son étude de 1847, et au cœur de la définition de sa discipline *quasi-mathématique*). Bien que cette conception ait déjà été considérée par Gauss et développée par Riemann, il semble que Listing doit être reconnu comme le premier à l'avoir étudiée avec autant d'insistance et de détail. On ne saurait nier bien sûr, pour insister une nouvelle fois sur ce point, l'influence de Gauss, ni celle bien plus effective encore de Riemann mais qui n'aboutit pas vraiment puisque Listing, parfaitement au fait de l'article de Riemann de 1857, préférera néanmoins dès 1858 introduire et développer la connexité à sa manière ; il parviendra, avec les insistances, à des résultats voisins de ceux à Riemann, via la cyclose[73] !

---

[71] Curie : « Section ou classe à laquelle appartient un constituant d'un complexe, point, ligne, surface ou corps solide. (Art. 1) » (p. 181).

[72] „Es scheint daher zweckmässig, solche als Constituenten unter den Daten gegebene Punkte so wie alle Elemente, sofern sie in ihrer Curie mitzählen sollen, durch das Beiwort *effectiv* zu bezeichnen, und andere bei den Betrachtungen oder Operationen nur vorübergehend zu Hülfe genommene und in ihrer Curie nicht mitzählende Elemente durch die Bezeichnung *virtuell* von ihnen ausdrücklich zu unterscheiden.“ (p.102-103)

[73] Le choix qu'il fait n'est pas des plus heureux, si l'on s'en remet aux appréciations de commentateurs : on va par exemple jusqu'à écrire qu'« il ne rend pas justice » à Riemann. À propos de la *cyclose*, on relèvera : „Cyklose, ringmässiger Zusammenhang, Anastomose“ [Anastomose n. f. ANAT, MED Communication naturelle ou pratiquée chi-

La richesse « topologique » de Riemann, qui sera abondamment sollicitée, est essentiellement rassemblée dans ses *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*[74] et dans sa *Theorie der Abel'schen Functionen*[75], auxquels il faut ajouter le *Fragment aus der Analysis situs*[76] ; ces écrits sont connus de Listing. À propos de l'article de 1857 nous retiendrons, pour faire suite à ce qui précède sur la connexité, des extraits de la partie consacrée aux « Théorèmes de l'*analysis situs* relatifs à la théorie des intégrales de différentielles exactes à deux termes »[77], où sont faits état de quelques-uns des résultats également présents dans le *Census*, mais où ils sont exprimés sous une forme qui « ne rendait pas entièrement justice à la pénétrante clarté de Riemann »[78].

> Dans l'étude des fonctions qui proviennent de l'intégration de différentielles exactes quelques théorèmes appartenant à l'*analysis situs* sont presque indispensables. Sous cette désignation employée par Leibnitz, quoiqu'en un sens peut-être un peu différent, on peut ranger une partie de l'étude des grandeurs continues où l'on ne considère pas les grandeurs comme existant indépendamment de leur position et comme mesurables les unes par les autres, mais où l'on étudie seulement les rapports de situation des lieux et des régions, en faisant complètement abstraction de tout rapport métrique. (p. 93)

À la suite, il rajoute qu'il a l'intention, dans une autre occasion mais qui malheureusement ne se présentera pas, « de traiter ce sujet qui fait complètement abstraction des relations métriques » ; il se contentera donc ici « d'exposer sous forme géométrique

---

rurgicalement entre deux conduits de même nature et, par extension, entre deux nerfs.] (Art. 9) ([Listing 1861, 85]). Dans le Dictionnaire de Müller on trouve également : „Zusammenhang oder Verflechtung (einer Fläche) [Riemann] : *Connexion.* „Cyklischer Zusammenhang" : *Cyclose*. Le nombre « cyclomatisch » est Le nombre maximal de cycloses possible (la connexion de Riemann moins 1) ; on peut aussi évoquer ici, non sans quelque abus, le 1er nombre de Betti (le *nombre cyclomatique* de Kirchoff) et le second nombre de Betti (« le nombre périphractique », également attribué à Maxwell (voir [Maxwell (1873)1881, art. 18–22]). Rappelons que dans *The Century Dictionary and Cyclopedia* ([*CDC*, 1889, 1895]), où Charles S. Peirce figure parmi les "*Contributors*", comme chargé de « la logique, la métaphysique, les mathématiques, l'astronomie et les poids et mesures », où trouve les définitions suivantes : "[Periphractic : […] Having, as a surface, such a form that not every closed line within it can shrink to a point without breaking. Thus, an anchor-ring is a *periphractic* surface." [*CDC* V, 4401] "Periphraxy: […] The number of times a surface or region must be cut through before it ceases to be periphractic." [*CDC* V, 4402]

[74] Sa *Doctordissertation* (Göttingen, 1851) à propos de laquelle J.-C. Pont et R. Taton écriront qu'elle marque un « tournant décisif dans le développement de l'*analysis situs* », qui de « simple jeu de l'esprit » était devenu un « auxiliaire précieux dans l'étude des fonctions analytiques » ([Pont 1974*a*, 59]).

[75] „Theorie der Abel'schen Functionen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 54, 1857, 101-155 ; „1. Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschränkt veränderlicher Grössen" (p. 101-104) ; „2. Lehrsätze aus der Analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständingen Differentialien" (p. 105-110) ; „3. Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen Grösse durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen" (p. 111-114) ; „Theorie der *Abel*'schen Functionen" (p. 115-155).

[76] [Riemann 1876, 448-451] (2^{e} éd. 1892, p. 479-482).

[77] Citations extraites de [Riemann 1898, 93-100].

[78] [Breitenberger 1999, 919].

quelques théorèmes nécessaires pour l'intégration des différentielles exactes à deux termes. » (p. 93)

> Quand sur une surface F l'on peut mener n courbes fermées a_1, a_2, …, a_n, qui, soit qu'on les considère séparément, soit qu'on les considère réunies, ne forment pas un contour d'encadrement complet d'une partie de cette surface, mais qui jointes à toute autre courbe fermée forment alors le contour d'encadrement complet d'une partie de la surface, la surface sera dite (n+1) fois connexe [(n+1*fach zusammenhangende Fläche*]. (p. 95)

> Une surface F, (n+1) fois connexe, peut, par l'effet d'une section transverse [*Querschnitt*], c'est-à-dire d'une coupure partant d'un point du contour d'encadrement, traversant l'intérieur de la surface et aboutissant en un point du contour d'encadrement, être transformée en une surface F', n fois connexe. Les parties du contour d'encadrement, à mesure qu'elles prennent naissance par l'effet de la section, jouent le rôle de contour pendant toute la continuation de cette opération, en sorte qu'une section transverse ne peut traverser aucun point de la surface plusieurs fois, mais peut prendre fin en un point de son propre cours antérieur. (p. 95-6)

Laugel préfère traduire le mot „*Querschnitt*“ par « section transverse », pour marquer la différence avec le mot « rétrosection » utilisé pour désigner la „*Rückkehrschnitt*“ (Picard, Appell et Goursat), que n'emploie pas Riemann[79].

> Une surface (n+1) fois connexe est décomposée, par conséquent, en une surface n fois connexe par toute section transverse qui ne la morcelle pas. (p. 97)

Nous nous en tiendrons à ces très modestes extraits de l'œuvre topologique de Riemann, aujourd'hui très bien connue et encore abondamment commentée ; nous ne chercherons pas non plus à expliciter le détail de la progression réalisée par Listing, ni à commenter les nombreuses difficultés qui relèvent autant du lexical que de démonstrations mathématiques et de leurs références, ou à en signaler les erreurs et les complications parfois trop exclusives bien que nécessaires, nous renvoyons le lecteur heureusement curieux à la lecture du trop mal connu *Census* de Listing et aux études déjà existantes qui en ont été faites[80]. Ce que nous préférons plutôt privilégier ici est ce que diront ou préféreront retenir de cet écrit quelques auteurs influents que nous avons déjà interpelés, qui nous donnerons ainsi l'occasion de nous plonger autrement dans cette initiation originale.

---

[79] Voir la note 1 de Laugel, p. 96. On aura également noté dans la citation en question le rapport au temps, celui de l'état de succession évoqué.

[80] Nous retiendrons notamment : [Pont 1974*a*, 41-58], [Biggs 1993, 109-113]) et le chapitre particulièrement intéressant que consacre à cette étude l'ouvrage [Murphey (1961) 1993] (chap. IX, p. 194-211).

Cayley et le « Théorème de Listing ».

Listing fait mention dans son *Census* de l'article daté du 8 mars 1861 d'Arthur Cayley, « On the Partitions of a Close »[81], mais c'est pour reconnaître aussitôt en note (note 1, p. 98) qu'il ne s'inscrit pas exactement dans la continuité des efforts de ses prédécesseurs, de ceux qui œuvrèrent sur le théorème d'Euler qui nous intéresse, que ces recherches se rapprochent bien des siennes, mais qu'elles demeurent cependant trop exclusivement restreintes.

En effet, Cayley part de la formule $F + S = E + 2$, dans laquelle F, S et E sont respectivement les nombres de faces, sommets et arêtes d'un polyèdre qu'il imagine projeté sur le plan d'une face quelconque de telle façon que les projections de tous les sommets n'appartenant pas à cette face tombent à l'intérieur de celle-ci. On a donc affaire à un polygone partagé dans lequel $F = P + 1$ (où P désigne le nombre de parties qui composent ce polygone) ; d'où la relation $P + S = E +1$ (S est le nombre de sommets et E le nombre de côtés de la figure plane)[82]. Observant ensuite qu'une telle formule exclue des cas tels que celui par exemple d'un polygone divisé en deux parties (par polygone intérieur entièrement détaché de lui), et dans le but de l'étendre de ceux-ci, Cayley introduit la formule suivante

$$P + S = E + 1 + B$$

Dans laquelle B désigne le nombre « coupures de contour » (*breaks of contour*) défini de la manière suivante : on observe d'abord que les côtés d'un polygone sont des lignes droites, dont on peut voir « au premier coup d'œil » que la théorie ne serait pas modifiée si on levait cette restriction en permettant aux côtés de devenir des lignes courbes. Cependant, en procédant de la sorte étaient introduites des figures fermées limitées par deux côtés, voire même par un seul qu'il appelle un « contour » (à savoir une « ligne fermée qui ne se coupe ni ne se rencontre elle-même », p. 63) .C'est donc, d'après lui, une nouvelle théorie qui voyait ainsi le jour, celle des « Partitions of a Close » ; un « fermé » (*close*) étant un espace délimité tel qu'aucune partie de lui ne peut être jointe à toute autre par une ligne sans qu'elle ne coupe la frontière ; cette dernière peut être considérée comme la « limite d'un simple contour, ou de deux ou plus contours entièrement situés à l'intérieur du fermé » (p. 63). Suivent d'autres définitions pour aborder la nouvelle généralisation (p. 63-64) :

---

[81] [Cayley 1861] (ou [Cayley *CP* (V) 1892, 62-65]).
[82] [Cayley (V) 1892, 62].

> L'excès au dessus de l'unité du nombre des contours qui constituent la frontière d'un fermé est la *coupure de contour* d'un tel fermé ; dans le cas d'un fermé délimité par un seul contour, la coupure de contour est zéro. (p. 63)

-) Le *sommet* sera : un point où une courbe se coupe ou se rencontre elle-même, où rencontre une autre courbe ; chaque extrémité d'une courbe ouverte, tout point isolé, tout point pris sur un *contour* (en l'absence d'un tel point, le contour est dit « pur » (*mere contour*))

-) Le *côté* sera : le chemin entre un sommet et lui-même, ou un autre sommet ; on remarque qu'un contour avec un point dessus est un côté, qu'un pur contour n'en est pas un (p. 63-64).

Cayley en vient ensuite à considérer un fermé limité par $\beta + 1$ où pour tout partage, P est le nombre des parties, S le nombre des sommets, E le nombre des côtés et B le nombre des coupures de contour ; alors, dans le cas d'un fermé non partagé on aura $P = 1$, $S = 0$, $E = 0$ et $B = \beta$, d'où :

$$P+S+\beta=E+1+B.$$

Cayley montre que « cette équation demeure valide quelque soit la manière dont le fermé est partagé » (p.64), et s'arrête à deux cas : le premier considère la surface d'un plan limitée par un pur contour à l'infini. Dans le cas du plan infini, pour lequel on a $\beta=0$, d'où $P+S=E+1+B$. Le second cas est plus intéressant et concerne une surface sphérique : la totalité de celle-ci est considérée comme un fermé limité par 0 contour (p. 64), on a $\beta=-1$, d'où l'équation : $P+S=E+2+B$. Il achève son article en observant :

> par conséquent, si la sphère est divisée en deux parties par un pur contour, $P = 2$, $S = 0$, $E = 0$, $B = 0$, et l'équation est satisfaite. Et en général, lorsque $B= 0$, alors $P + S = E + 2$; ou, écrivant F à la place de P, alors $F + S = E + 2$, qui est l'équation d'Euler pour un polyèdre. (p. 65)

Dans une note ajoutée après la publication de ce premier article, Cayley remarquait encore :

> La généralisation qui est donnée ici du théorème d'Euler $S + F = E + 2$, est un premier pas fait en direction de la théorie développée dans le mémoire de Listing 'Census räumlicher Complexe or Verallgemeinerung des Euler'schen von den Polyedern' […][83].

Le 12 novembre 1868, Cayley fera un court rapport, de moins de 15 lignes, sur le *Census* de Listing à la *London Mathematical Society*[84], dans lequel il évoquera le *théorème fondamental*, à savoir la relation $a-(b-k)+(c-k'+\pi)-(d-k''+\pi'-$

[83] [Cayley *CP* (V) 1892, 617].
[84] *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. II (1866-1869), 103-104 (voir [Cayley *CP* (V) 1892, 22]).

$\omega) = 0$ qui existe dans n'importe qu'elle figure entre a le nombre des points, b le nombre de lignes, c le nombre des surfaces, d le nombre des espaces, et « certaines quantités supplémentaires $k, k', k'', \pi, \pi', \omega$ ». Il relève que ces quantités supplémentaires sont nulles pour une classe étendue de figures, et que la relation se réduit alors à la forme $a - b + c - d = 0$; à la suite il retient un exemple, celui d'une boite, qui doit montrer l'intérêt de ces quantités : lorsque la boite est fermée, $a = 8$, $b = 12$, $c = 6$ et $d = 2$. Si la boite est ouverte, $a = 10$, $b = 15$, $c = 6$ et $d = 1$, si l'on retire son couvercle, $a = 8$, $b = 12$, $c = 5$ et $d = 1$; dans tous les cas $a - b + c - d = 0$. Si, de plus, on retire aussi le fond de cette boite, on aura $a = 8$, $b = 12$, $c = 4$ et $d = 1$: mais dans ce cas, une des quantités supplémentaires doit être prise en compte, $k'' = 1$. Cayley se limitera alors à relever que la relation du théorème de Listing prend la forme $a - b + c - (d - k'') = 0$, et à conclure que : «La plus grande difficulté et l'intérêt du Mémoire [de Listing] est dans la détermination des quantités supplémentaires ».

Le second article de Cayley, "On Listing's Theorem"[85], interpelle cette fois plus directement le *Census* de Listing, en neuf pages dont près de sept d'entre elles son consacrées à des exemples servant à illustrer le théorème en question. Pour lui il s'agit d'une « généralisation du théorème d'Euler $S + F = E + 2$ » ; le « théorème de Listing » propose comme relation

$$A + C = B + D + (p - 1),$$

où

$$A = a,$$

$$B = b - \kappa',$$

$$C = c - \kappa'' + \pi,$$

$$D = d - \kappa''',$$

a est le nombre de points ; un point est toujours simple (on ne tient pas compte de sa multiplicité). Il est soit isolé, soit situé sur une ligne ou une surface.

b est le nombre de lignes (courbes ou droites). Si la ligne ne se referme pas sur elle-même elle a un point en chacune de ses extrémités ; si elle se recoupe, il doit y avoir un point en chaque intersection. En général, un point placé sur une ligne est entendu comme une extrémité (une frontière [*boundary*]) de celle-ci. « Donc, une ligne est

[85] [Cayley 1873] (ou [Cayley *CP* (VIII) 1895, 541-547]). Il ne fait aucun doute que cet intérêt de Cayley pour le travail de Listing est premièrement à rattacher à ses études en théorie des graphes qu'il conduisait sur les *arbres* et qui remontaient à la fin des années 1850 (Voir notamment [Cayley 1857], ou [Cayley *CP* (III) 1890, 172-176]).

soit une “oval” [ovale] (c’est-à-dire, une courbe fermée sans intersection et de forme quelconque), une “punctate oval” [ovale ponctuée] (ovale avec un point simple dessus), ou soit une « biterminale » (ligne terminée par deux points distincts). Par exemple, une figure en forme de huit est prise comme deux ovales pontuées ; une ovale sur laquelle sont placés deux points équivaut à deux biterminales.

k’ Par définition, il serait « la somme, pour toutes les lignes, du nombre de circuits pour chaque ligne » (p. 541). Pour une ovale le nombre de circuits est égal à 1 et pour toute autre ligne (ovale ponctuée ou biterminale) il est égal à 0 ; *k’* est de fait le nombre d’ovales. Il existe des définitions analogues pour *k’’* et *k’’’*.

c est le nombre de surfaces. Une surface est toujours finie, et si elle ne se renferme pas sur elle-même [i.e. *not rentrant*], elle doit avoir une ligne en chaque extrémité [*termination*]. Si la surface se coupe elle-même, on a en l’intersection un point ou une ligne. En général, un point ou une ligne, placé sur une surface, est considéré comme une extrémité ou une frontière. Si une ligne coupe une surface, il y a en l’intersection un point qui constitue une extrémité ou une frontière aussi bien de la surface que de la ligne. « Donc, une surface est soit un ovoïde [*ovoid*] (simple surface fermée, telle que la sphère ou l’ellipsoïde), un anneau (surface telle qu’un tore […]), ou soit de forme plus compliquée dont la surface se referme sur elle-même [*rentrant surface*] ; ou encore, une surface limitée en partie par un point ou des points, une ligne ou des lignes[86].

k’’ est la somme, pour les différentes surfaces, du nombre de circuits sur chaque surface. Le mot circuit signifie ici un chemin sur la surface d’un point à lui-même : tous les circuits qui peuvent être amenés à coïncider par une variation continue sont considérés comme identiques ; et le circuit contractile [*evanescible circuit*] qui se

[86] “We may in particular consider a blocked surface having upon it one or more blocks: where by a block is meant a point, a line, or a connected superficial figure composed of points and lines in any manner whatever, the superficial area (if any) included within the block being disregarded as not belonging to the surface, or being, if we please, cut out from the surface. Thus an avoid having upon it a point, and a segment or incomplete avoid bounded by an oval, are of them to be regarded as a blocked ovoid; the boundary being in the first case the point, and in the second case the oval; and so in general the blocked surface is bounded by the boundary or boundaries of the block or blocks. It will be understood from what precedes, and it is almost needless to mention, that for any surface we can pass along the surface from each point to each point thereof; any line which would prevent this would divide the surface in two or more distinct surfaces.” (p. 541)
Toujours à propos de ce vocabulaire tel que le caractérise Cayley, on relèvera ce qui le sépare des définitions rencontrées dans [*CDC* 1889, 1895] : “ Block: […] an inclosed space” ([*CDC* I, 591])
“Oval: … a) a closed curve everywhere convex, without nodes, and more pointed at one end than at other.
b) A curve or part of a curve returning into itself without a node or a cusp.
c) A part of a curve returning into itself without inflections or double tangents.” ([*CDC* V, 4192])”
“Ovoid : I. ‘Egg-shaped’: said of solids. II. ‘An egg-shaped body’.” [*CDC* V, 4211].

réduit au point lui-même est négligé. De plus, on ne compte que les circuits simples, négligeant ceux qui peuvent être obtenus par toute répétition ou combinaison de ceux-ci. Par conséquent, pour un ovoïde, ou tout « 1-ovoïde en blocs » [*one-blocked ovoid*], il y a seulement le circuit contractile, c'est-à-dire, aucun circuit à compter ; mais pour un « 2-ovoïde en blocs » [*two-blocked ovoid*] il y a en outre un circuit, ou que l'on compte pour un ; et ainsi pour un « n-ovoïde en blocs » [*n-blocked ovoid*] on compte $n - 1$ circuits. Pour un anneau, il est facile de voir que (outre le circuit contractile) ces circuits sont au nombre de 2 ; et ainsi des autres cas.

π sa définition la plus simple est qu'il désigne le nombre d'ovoïdes (non « en blocs » [*unblocked ovoids*]) ou autres surfaces non limitées par un point ou une ligne.

d est le nombre d'espaces, reconnaissant l'un d'eux comme étant l'espace infini.

k''' est la somme, pour les différents espaces, du nombre de circuits dans chaque espace : le mot circuit signifiant ici un chemin dans l'espace d'un point à lui-même ; tous les circuits qui peuvent être amenés à coïncider par une variation continue sont considérés identiques, et le circuit contractile qui se réduit au point lui-même est négligé. De plus, on compte uniquement les circuits simples, négligeant les circuits qui peuvent être obtenus par répétition ou combinaison de ceux-ci. Donc pour l'espace infini, ou pour l'espace contenu dans un ovoïde, il y a seulement le circuit contractile, ou il n'y a pas de circuit à compter ; et il en est de même pour le cas ou à l'intérieur d'un tel espace on a un nombre quelconque de blocs ovoïdaux [*ovoidal blocks*] (« le terme, je pense, sera compris sans explication » (p. 542)) ; mais si a l'intérieur de l'espace on a une ovale, un anneau, ou autre "anneau en blocs" [*ring-block*], de nature quelconque, alors il y a (outre le circuit contractile) un circuit entrelaçant l'"anneau en blocs", et on le compte pour un ; et ainsi, si il y a n "anneaux en blocs", séparés ou s'entrelaçant les uns aux autres d'une quelconque manière, alors […] comptera en conséquence n circuits. Ainsi, pour l'espace intérieur d'un anneau (outre le circuit contractile) on compte un circuit ; et il en va de même si on a à l'intérieur de l'anneau un nombre quelconque de blocs ovoïdaux ; mais si il y a à l'intérieur de l'anneau un anneau ovale [*oval ring*] ou autre « anneau en blocs », alors il y a un nouveau circuit, et on compte en tout (pour l'espace en question) deux circuits.

p est le nombre de parties détachées de la figure ; à savoir, le nombre d'agrégats séparés de points, de lignes et de surfaces. Observons que des anneaux entrelacés l'un à l'autre d'une quelconque manière (mais ne se coupant pas) sont considérés comme détachés ; ainsi, deux surfaces fermées, l'une à l'intérieur de l'autre, sont aussi considérées comme détachées. La figure peut être l'espace infini seul ; on a alors $p = 0$.

Nous ne retiendront que quelques exemples, parmi ceux nombreux donnés par Cayley pour illustrer la signification des termes et la nature du théorème, et pour indiquer « de quelle manière pouvait être atteinte une démonstration générale » (p. 542) :

L'espace infini.

a=0,			A=0		
b=0,	k'=0,			B=0	
c=0,	k''=0,	π=0,	C=0,		
d=1,	k'''=0,			D=1	
p=0,				$p-1$	$=-1$
				0	= 0.

Surface sphérique.

a=0,			A=0		
b=0,	k'=0,			B=0	
c=1,	k''=0,	π = 1,	C = 2,		
d=2,	k'''=0,			D=2	
p=0,				$p-1$	= 0
				2	= 2.

On observe comme effet : C augmente de 2 ; D et p-1 de 1.

Surface sphérique avec un point dessus.

a=1,			A=1		
b=0,	k'=0			B=0	
c=1,	k''=0,	π = 1,	C=1,		
d=2,	k'''=0,			D=2	
p=1,				$p-1$	= 0
				2	= 2.

Soit l'effet : a augmente de 1 et π diminue de 1 ; c'est-à-dire, A est augmenté de 1 et C diminué de 1.

Surface sphérique avec n points dessus (n ≥ 2).

$$\begin{array}{lllll}
a=n, & & & A=n & \\
b=0, & k'=0, & & B=0 & \\
c=1, & k''=n-1, & \pi=1, & C=2-n, & \\
d=2, & k'''=0, & & D=2 & \\
p=1, & & & \underline{p-1} & \underline{=0} \\
 & & & 2 & =2.
\end{array}$$

Si on imagine maintenant qu'en plus des n points du cas précédent on rajoute une ouverture (limitée par une courbe fermée) ; on a alors le cas suivant :

$$\begin{array}{lllll}
a=n, & & & A=n & \\
b=0, & k'=1, & & B=0 & \\
c=1, & k''=n, & \pi=0, & C=1-n, & \\
d=1, & k'''=0, & & D=1 & \\
p=1, & & & \underline{p-1} & \underline{=0} \\
 & & & 1 & =1.
\end{array}$$

On a alors pour effet : a et k' augmentés de 1, B est par conséquent inchangé ; k'' augmente de 1 et par conséquent C diminue de 1 ; d est diminué de 1 et par conséquent D l'est aussi de 1.

Surface sphérique avec m ouvertures (m ≥ 2).

$$\begin{array}{lllll}
a=0, & & & A=0 & \\
b=m, & k'=m & & B=0 & \\
c=1, & k''=m-1, & \pi=0, & C=2-m, & \\
d=1, & k'''=m-1, & & D=2-m & \\
p=1, & & & p-1 & =0 \\
\hline
 & & & 2-m & =2-m.
\end{array}$$

En comparant ce cas avec celui précédent d'une surface sphérique avec n points dessus ($n \geq 2$), on peut apprécier les différents effets d'un point et d'une ouverture.

Surface polyédrique fermée.

Soit S le nombre des sommets, F le nombre des faces et E celui des arêtes ; on a alors :

$$\begin{array}{llllll}
a=S, & & & A=S & & \\
b=E, & k'=0, & & & B=E & \\
c=F, & k''=0, & \pi = 0, & C=F, & & \\
d=2, & k'''= 0, & & & D & = 2 \\
p=1, & & & & p-1 & = 0 \\
\hline
 & & & & S+F & = E+2.
\end{array}$$

De sorte qu'on a le théorème d'Euler. Observons que ce théorème (d'Euler) ne s'applique pas aux surfaces polyédriques annulaires ou aux enveloppes polyédriques. Par exemple, considérons une enveloppe, les surfaces extérieure et intérieure de celle-ci sont chacune d'elles une surface polyédrique fermée ; $S = S' + S''$, $F = F' + F''$, $E = E' + E''$ où $S' + F' = E' + 2$, $S'' + F'' = E'' + 2$, et par conséquent $S + F = E + 4$. (p. 545)

Le théorème de Listing lui s'applique ; ainsi on a :

$$\begin{array}{lllll}
a=S'+S'', & & & A=S'+S'', & \\
b=E'+E'', & & B= & E'+E'' & \\
c=F'+F'', & & C=F'+F'', & & \\
d=3, & D= & & & 3 \\
p=2, & p-1 & = 0 & & 1 \\
\hline
 & & S+F & & = E'+E''+4.
\end{array}$$

Même si de tels exemples font un peu mieux percevoir et dans l'acte comment se constituent et interviennent les fameux *attributs* de Listing, le développement excessivement élémentaire et limité de Cayley n'apporte pas de véritable clarification mathématique du *Census* ; Il permet tout au plus de concevoir son possible rôle dans une théorie des graphes en plein essor[87]. On reste loin des objectifs de Listing, bien loin de la mise en valeur d'une réelle richesse mathématique. Cependant, force est de reconnaître l'importance de cet intérêt de Cayley pour l'œuvre de Listing, en permettant une plus large diffusion de son *Census* il étendra son influence à un large public, qui débordait largement celui des seuls mathématiciens ; à ce titre, nous reviendrons sur les contributions de James Clerk Maxwell et de Charles Sanders Peirce.

James Clerk Maxwell, un intérêt topologique pour la physique entre Gauss, Riemann et Listing.

Maxwell était un réel connaisseur des œuvres de Gauss et de Riemann, également instruit de leurs intérêts respectifs pour la *Geometria situs*[88] et l'*Analysis situs*[89] ; ce qu'il

---

[87] Ce lien est d'ailleurs suggéré par Cayley lui-même dans son article [Cayley 1874] (ou voir [Cayley *CP*(IX) 1896, 202-203]) ; où on peut lire : « les différents cas de telles ramifications sont […] où la question mathématique de la détermination de telles formes appartient à la classe de questions considérées dans mon article 'On the Theory of the Analytical Forms called Trees', *Phil. Mag.* vol. XIII. (1857), [203], et vol. XVIII (1850), [247], et dans quelques articles sur les *Partitions* dans le même journal. » (p. 203).

[88] Le volume V du *Werke* de Gauss (consacré à ses travaux de physique mathématique) est publié en 1867, on y trouve plusieurs manuscrits et notes publiés pour la première fois et d'un réel intérêt pour Maxwell (dixit [Epple 1999, 314]) ; signalons par exemple à la page 605, dans la partie consacrée au *Nachlass* de Gauss, le texte *Zur Elektrodynamik* (p. 601-630), une phrase bien connue aujourd'hui que relèvera en son temps Maxwell et un problème résolu par Gauss (daté du 22 janvier 1833) qu'il reprendra à son tour et réinterprétera : „Von der *Geometria Situs*, die LEIBNIZ ahnte und in die nur einem Paar Geometern (EULER und VANDERMONDE) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts. Eine Hauptaufgabe aus dem *Grenzgebiet* der *Geometrie Situs* und der *Geometria Magnitudinis* wird die sein, die Umschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen. Es seien die Coordinaten eines unbestimmten Punkts der ersten Linie x, y, z ; der zweiten x', y', z' und

$$\iint \frac{(x'-x)(\mathrm{d}y\mathrm{d}z'-\mathrm{d}z\mathrm{d}y')+(y'-y)(\mathrm{d}z\mathrm{d}x'-\mathrm{d}x\mathrm{d}z')+(z-z')(\mathrm{d}x\mathrm{d}y'-\mathrm{d}y\mathrm{d}x')}{\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=V$$

dann ist dies Integral durch beide Linien ausgedehnt $=4m\pi$ und m die Anzahl der Umschlingungen. Der Werth ist gegenseitig, d. i. er bleibt derselbe, wenn beide Linien gegeneinander umgetauscht werden.“ Maxwell reviendra sur ce résultat dans une lettre adressée à Tait le 4 décembre 1867 [Voir [Maxwell 1995, 325-327] et dans [Maxwell (1873) 1881], où il écrit : "It was the discovery by Gauss of this very integral, expressing the work done on a magnetic pole while describing a closed curve in presence of a closed electric current, and indicating the geometrical connexion between the two closed curves, that led him to lament the small progress made in the Geometry of Position since the time of Leibnitz, Euler and Vandermonde. We have now, however, some progress to report, chiefly due to Riemann, Helmholtz and Listing." (Vol. II, §. 422 p. 41). Pour faire suite à la déclaration de Gauss, il écrivait encore : "We are here led to considerations belonging to the Geometry of Position, subject which, though its importance was l'est sans doute moins est l'importance considérable qu'il accordera aux travaux de Listing sur les nœuds[90], qu'il fera connaître à son ami Tait en lui fournissant une copie des *Vorstudien zur Topologie*[91]. Plus encore, c'est la part belle qu'il fera au *Census*[92] dont il allait tirer le plus large parti dans son ouvrage *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873) ; *Census* auquel il intéressera notablement un Charles S. Peirce d'abord dubitatif. Nous y reviendrons.

Les quelques extraits de ce *Traité*[93] suivants méritent d'être rapportés. C'est d'emblée dans le *Preliminary*, « De la mesure des quantités » que l'on trouve les premières et nombreuses évocations des enseignements du *Census* de Listing (où Maxwell reprend en partie son résumé de 1869) :

---

pointed out by Leibnitz and illustrated by Gauss, has been little studied. The most complete treatment of this subject has been given by J. B. Listing." (vol. I, p. 16).

[89] C'est ce que l'on peut facilement constater dans [Maxwell 1995], à la lecture par exemple des écrits suivants : N°. 304 "Drafts on topology" (*circa* September 1868, [*Geometry of position*], p. 433-438), N°. 305 "Drafts on continuity and topology" (*circa* September 1868, *On physical continuity and discontinuity*, p. 439-442), N°. 306 "Letter to William Thomson" (28 September 1868, p. 443-445) et N°. 317 "Manuscript on the topology of surfaces" (29 December 1868, [*On the geometry of surfaces*], p. 466-469). Ce dernier écrit rappelle, et semble en être inspiré, l'article de Cayley de 1861, "On the partitions of a Close" ; on se rappellera également que le rapport de Cayley sur le *Census* de Listing date du 12 novembre 1868.

[90] On sait grâce à la correspondance qu'il eut avec son ami P. G. Tait toute l'importance de ces recherches dont il ne publiera pratiquement rien, qui avaient été suscitées par des travaux de William Thomson (Lord Kelvin, 1824-1907) initiés dès 1867 et concernés par sa théorie des « atomes tourbillons », directement inspirés de l'article de Riemann sur les fonctions abéliennes, déjà évoqué ici, et de l'article de Helmholtz sur le « mouvement tourbillonnaire » en hydrodynamique ([Helmholtz 1858], dont une traduction en anglais due à Tait paraîtra en 1867 ([Tait 1867]). C'est précisément au cours de cette année, et dans la suivante, que Maxwell entreprendra des travaux topologiques d'où ressortiront plusieurs manuscrits en 1868 sur les nœuds et les enlacements. On retrouve dans ces textes que Tait le poussait à publier, mais qui ne paraîtront que très tardivement ([Maxwell 1995]), plusieurs anticipations et notions topologiques de valeur (Voir [Epple 1999, 316-317]) ; Epple en relève plusieurs, tout en observant finalement : "Both Thomson and Maxwell did not yet have a sufficiently clear language to give precise formulations and proofs of their topological results; neither the notion of the genus of a surface nor that of the 'order of connectivity' of a space region were completely clear in their work. Maxwell and Thomson tried to explain their ideas mainly in terms of 'irreconcilable curves' in a domain, but 'reconcilability' meant for them something closer to homotopical rather than homological equivalence. […] A closer analysis shows that it was physical thinking rather than mathematical precision that helped Thomson and Maxwell to find correct results." (p. 316) Pour plus de précisions, on se rapportera également à l'article de Epple, ([Epple 1998]).

[91] [Tait 1898, 274] : "Here, as was to be expected, I found many of my results anticipated, but I also obtained one or two hints which, though of the briefest, have since been very useful to me. […] This work of Listing's, and an acute remark made by Gauss (which, with some comments on it by Clerk-Maxwell, will be referred to later), seems to be all of any consequence that has been as yet written on this subject. I have acknowledged in text all the hints I have got from these writers…."

[92] Maxwell avait déjà fait un résumé de l'article de Listing dès 1869, le 11 février, à l'occasion d'une réunion de la *London Mathematical Society* (*Procceedings of the London mathematical Society*, 2 (1869) : 165-6 ; voir [Maxwell 1995, 471-2].

[93] Pour ces extraits, nous reprenons [Maxwell 1885 (I) et 1887 (II)]), avec une traduction légèrement modifiée par nos soins et dans laquelle nous faisons figurer entre crochets, lorsque cela sera opportun, les expressions utilisées par Maxwell ainsi que ses notes, les autres notes sont nôtres ; nous reprenons également les notations employées par Maxwell.

18.] Il y a toutefois des cas où les conditions pour que *Xdx* + *Ydy* + *Zdz* soit une différentielle exacte [complete differential], à savoir

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = 0, \frac{dX}{dZ,} - \frac{dZ}{dx} = 0 \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0,$$

sont remplies dans une certaine région de l'espace, et où cependant l'intégrale [line-intégrale] prise de *A* à *P* peut avoir des valeurs différentes pour deux contours [lines], tous deux entièrement compris dans la région. Ce cas peut se présenter si la région est en forme d'anneau, et si les deux lignes de *A* à *P* sont situées dans des segments opposés de l'anneau. On ne peut, dans ce cas, passer d'un contour [path] à l'autre d'un mouvement continu sans sortir de la région.

Nous sommes conduits ainsi à des considérations rentrant dans la Géométrie de position, sujet peu étudié, quoique son importance ait été signalée par Leibnitz et illustré par Gauss. Le travail le plus complet sur ce sujet a été donné par J.-B. Listing[*][(*) *Der Census räumlicher Complexe* (*Gött. Abh.*, vol. X, p. 97 ; 1861).]

Soient *p* points dans l'espace et *l* lignes de forme quelconque joignant ces points de façon que jamais deux lignes ne se coupent et qu'aucun point ne soit laissé isolé. Nous appellerons diagramme[94] une figure composée de cette manière. De ces lignes, *p*-1 suffisent pour relier les *p* points et former un système relié [connected system]. Toute ligne en plus donnera lieu à une boucle ou contour fermé [closed path], ou, comme nous l'appellerons, à un cycle. Le nombre des cycles indépendants dans le diagramme est $k = l - p + 1$.

Tout contour [path] fermé, décrit en suivant les lignes du diagramme, se compose de ces cycles indépendants pris chacun un nombre quelconque de fois et dans une direction quelconque.

L'existence des cycles est appelée cyclose[95], et le nombre des cycles d'un diagramme nombre cyclomatique[96].

Cyclose des surfaces et des régions.

Les surfaces peuvent être complètes [complete] ou limitées [bounded]. Les surfaces complètes sont infinies ou fermées. Les surfaces limitées se terminent par une plusieurs lignes fermées, qui, dans le cas limite, peuvent se réduire à des lignes finies ou à des points.

Une région finie de l'espace est limitée par une ou plusieurs surfaces fermées. De celles-ci, l'une est la surface extérieure ; les autres y sont comprises, sont extérieures les unes aux autres, et sont appelées les surfaces intérieures.

Si la région est limitée par une seule surface, on peut supposer que cette surface se contracte sans cesser d'être continue ou sans se couper elle-même. Si la région est à

---

[94] Pour Listing, un diagramme est : „eine Linearcomplexion, auf welche ein Constituent durch allmälige Verengerung oder Retraction seiner Grenzen zurückgeführt wird (Art. 13 u. ff.)" ([Listing 1861, 181]).
[95] *Cyklose*, „ringmässiger Zusammenhang, Anastomose (Art. 9)" ([Listing 1861, 181]).
[96] *Cyclodisch*, „ringmässig zusammenhängend, Anastomosirend (Art. 9)" ([Listing 1861, 181]).

simple continuité [of simple continuity], comme l'est une sphère, cette opération pourra être continuée jusqu'à ce que la région soit réduite à un point ; mais, si la région à la forme d'un anneau, on obtiendra finalement une courbe fermée ; et si la région à des connexions multiples [multiple connexions], le résultat sera un diagramme de lignes, dont le nombre cyclomatique [cyclomatic number] est celui de la région. L'espace extérieur à la région a le même nombre cyclomatique que la région, et par suite, si la région est limitée par des surfaces intérieures et extérieures, son nombre cyclomatique est la somme des nombres correspondant à toutes ces surfaces.

Lorsqu'une région renferme d'autres régions, elle est appelée périphractique[97].

Le nombre des surfaces limites intérieures d'une région est appelé son nombre périphractique. Une surface fermée est aussi périphractique, son nombre périphractique est l'unité.

Le nombre cyclomatique d'une surface fermée est deux fois celui de la région qu'elle limite. Pour trouver le nombre cyclomatique d'une surface limitée, on suppose que toutes les frontières [boundaries] se contractent vers l'intérieur sans rupture de continuité, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent. La surface se réduira alors à un point dans le cas d'une surface acyclique [acyclic surface], à un diagramme de lignes dans le cas de surfaces cycliques [cyclic surfaces]. Le nombre cyclomatique de ce diagramme est celui de la surface.

19.] THEOREME I. *Si, dans toute l'étendue d'une région acyclique,*

$$Xdx+Ydy+Zdz=-N\Psi$$

la valeur de l'intégrale [line-integral] prise d'un point A à un point P, le long d'un contour [path] quelconque intérieur à la région, est constante.

Nous montrerons d'abord que l'intégrale prise le long d'un circuit fermé [closed path] quelconque intérieur à la région est égale à zéro. […]

20.] THEOREME II. *Dans une région cyclique pour toute l'étendue de laquelle est satisfaite l'équation*

$$Xdx+Ydy+Zdz=-N\Psi,$$

l'intégrale de A à P, prise le long d'une line tracée à l'intérieur de la région, n'est en général pas déterminée, si l'on ne spécifie le canal [the channel of communication] *entre A et P*.

Soit K le nombre cyclomatique de la région : on peut faire dans la région K sections au moyen de surfaces que nous appellerons diaphragme[98], et ainsi fermer K des canaux de jonction [of communication] ; la région est ainsi ramenée à être acyclique sans que sa continuité soit détruite.

[97] *Periphraktisch*, „allseitig geschlossen, wie sphäroïdische Flächen oder rings umhüllende körperliche Räume (Art. 24, 42)" (*Census*, p. 182). *Periphraxis*, „Eigenschaft einer Fläche oder eines Raumes, wenn sie allseitig zusammenhängen und einen Complex oder Complextheil rings umhüllen. (Art. 24, 42)" ([Listing 1861, 182])

[98] *Diaphragma,* „oder Zwerchfläche, eine acyklodische, durch eine cyklische Linie begrenztz Fläche (Art. 7)" ([Listing 1861, 181]).

L'intégrale [line-integral] prise de *A* à *P* suivant une ligne qui ne coupe aucun de ces diaphragmes sera, d'après le théorème précédent, de valeur déterminée.

Supposons maintenant *A* et *P* infiniment voisins l'un de l'autre [indefinitly near to each other], mais situés de part et d'autre d'un diaphragme : soit *K* l'intégrale [line-integral] suivant le chemin [path] de *A* à *P*.

Soient A' et P' deux autres points de part et d'autre du même diaphragme, et infiniment voisins l'un de l'autre, et soit *K'* l'intégrale suivant le chemin *A'* à *P'*. Je dis que *K=K'*. […]

Donc, l'intégrale [line-integral] prise suivant un contour fermé [closed curve] qui traverse un diaphragme du système dans une direction donnée est une quantité constante *K*, que l'on appelle la constante cyclique [Cyclic constant] correspondant au cycle donné.

Soit une courbe fermée quelconque tracée à l'intérieur de la région et coupant le diaphragme du premier cycle *p* fois dans la direction positive et *p'* fois dans la direction négative ; et soit $p - p' = n_1$. L'intégrale de la ligne [line-integral] suivant la courbe fermée sera alors $n_1 K_1$.

De même, l'intégrale de ligne [line-integral] suivant une courbe fermée quelconque sera

$$n_1 \mathrm{K}_1 + n_2\, \mathrm{K}_2 + \ldots + n_\mathrm{K}\, \mathrm{K}_\mathrm{K}\ ;$$

où n_K représente l'excès du nombre des passages positifs sur le nombre des passages négatifs de la courbe à travers le diaphragme du cycle *K*. […]

Des intégrales sur une surface [On Surface-Integrals].

21.] Soit *d*S l'élément de surface, et *ε* l'angle que fait la direction du vecteur quantité [vector quantity] *R* avec la normale menée à la surface du côté positif de cette surface. Alors

$\iint R\ \ \mathrm{COS}\ \varepsilon\ d\mathrm{S}$ est appelée l'*intégrale* [surface-integral] *de R sur la surface S*.

THEOREME III. *L'intégrale* [surface-integral*] d'un flux à travers une surface fermée peut s'exprimer par l'intégrale* [volume-integral] *de sa convergence étendue à tout le volume compris à l'intérieur de la surface*.

Soient *X*, *Y*, *Z* les composantes de *R* ; soient *l*, *m*, *n*, les cosinus des angles formés avec les axes par la normale *S* dirigée vers l'intérieur de cette surface. […]

Si *X*, *Y*, *Z*, sont continus et finis à l'intérieur d'une surface fermée, l'intégrale [surface-integral] de *R* sur cette surface complète sera

$$\iint R\ COS\ dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) dxdydz.$$

l'intégrale triple étant étendue à tout le volume intérieur à *S*.

Supposons maintenant que X, Y, Z ne soient pas continus à l'intérieur de la surface fermée ; […]

Des tubes et des lignes de flux.

Si l'espace est divisé en tubes, de façon que l'intégrale [surface-integral] sur une section quelconque de chaque tube soit l'unité, les tubes sont appelés *tubes unités*, et l'intégrale [surface-integral] prise sur une surface finie quelconque S, limitée par une courbe fermée L, est égale au *nombre* de ces tubes qui traversent la surface S dans le sens positif, ou, ce qui revient au même, qui passent à travers la courbe fermée L.

Donc l'intégrale [surface-integral] sur S ne dépend que de la forme de sa limite [boundary] L, et non de la forme de la surface à l'intérieur de cette limite.

Des régions périphractiques.

Si, dans l'étendue d'une région limitée extérieurement par une seule surface fermée S, la condition solénoïdale

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{\partial Z}{dz}=0$$

est satisfaite, l'intégrale [surface-integral] prise sur une surface fermée quelconque intérieure à la région sera nulle, et l'intégrale [surface-integral] prise sur une surface limitée, intérieure à la région, ne dépendra que de la forme de la courbe fermée qui constitue sa frontière.

Mais ces résultats ne sont pas vrais en général, si la région pour laquelle la condition solénoïdale est satisfaite est limitée autrement que par une simple unique. Car, si elle est limitée autrement que par une seule surface continue, l'une des surfaces limites est la surface extérieure ; les autres sont des surfaces intérieures, et la région S est périphractique puisqu'elle renferme d'autres régions qu'elle entoure entièrement. […]

Quand nous avons à nous occuper d'une région périphractique, la première chose à faire est de la ramener à être apériphractique, en menant des lignes L_1, L_2, &c. qui joignent les différentes surfaces intérieures S_1, S_2, &c à la surface extérieure S. Chacune de ces lignes, pourvu qu'elle ne relie pas deux surfaces qui sont déjà en communication continue [continuous connexion], réduit d'une unité le nombre périphractique : en sorte que le nombre total des lignes à tracer pour faire disparaître la périphraxie est égal au nombre périphractique, ou au nombre des surfaces intérieures. En menant ces lignes, nous devons nous souvenir que toute ligne joignant des surfaces déjà reliées ne diminue pas le nombre périphractique, mais augmente le nombre cyclomatique.

Quand ces lignes ont été menées, nous pouvons affirmer que, si la condition solénoïdale est satisfaite dans la région S, toute surface fermée, tracée entièrement à l'intérieur de la région et ne coupant aucune des lignes, donne lieu à une intégrale [surface-integral] nulle. […]

L'exemple le plus familier d'une région périphratique, à l'intérieur de laquelle la condition solénoïdale est satisfaite, est la région qui entoure une masse exerçant une attraction ou une répulsion inversement proportionnelle au carré de la distance. […]

Maxwell consacre aussi une partie aux relations dextrogyres et lévogyres dans l'espace, où il évoque à nouveau l'opération introduite par Listing sous le nom de *perversion* dans ses *Vorstudien*. On retrouve une nouvelle fois aussi la déclaration suivante :

> C'est précisément la découverte de cette intégrale exprimant le travail effectué par un pôle magnétique qui décrit une courbe fermée en présence d'un courant électrique fermé, et indiquant la relation géométrique de ces deux courbes fermées, qui amena Gauss à déplorer le peu de progrès faits par la Géométrie de Position depuis l'époque de Leibnitz, d'Euler et de vandermonde. Nous avons maintenant à signaler quelques progrès principalement dus à Riemann, Helmholtz et Listing[99].

Charles Sanders Peirce, le recours à la Topologie, faite Synectics puis Topics ou Topical geometry ; le "Théorème Peirce-Listing", ou le "Théorème de Listing" revisité à la lumière de singularités topiques.

Les travaux de Charles Sanders Peirce (1839-1914), "the American Leibniz"[100], sont particulièrement d'actualité depuis quelques années ; en témoignent plusieurs projets d'édition en cours de ses œuvres, ainsi qu'un grand nombre de publications et de thèses, de rencontres nationales et internationales. Logicien, philosophe et métaphysicien de renom, il est aussi reconnu comme mathématicien[101]. Ses intérêts philosophiques (dont la quête d'une « philosophie exacte »[102]) et logiques pour la « continuité » le verseront plus tardivement dans une étude détaillée de la « topologie ». Singulièrement, et bien qu'il connaisse les textes de Riemann et de Gauss s'y rapportant, ce sont ceux de Listing qui auront sa préférence. Cependant, cet intérêt pour l'œuvre de Listing n'est pas immédiat,

[99] *Traité…*, Volume II, § 422.

[100] [Weiss 1934, 403].

[101] Outre le fait que son père Benjamin Peirce (1809-1880) est professeur de mathématiques à Harvard, et un mathématicien de grande valeur qui tiendra à ce que son fils fut un scientifique comme lui et qui le fera côtoyer nombre des grands mathématiciens de son temps, nous relèverons simplement qu'il ne restera indifférent à cette influence. Pour preuve, signalons [Peirce 1976] et les travaux récents de Jérôme Havenel consacrés aux mathématiques et à leur philosophie dans l'œuvre de Peirce, réalisés dans la suite de sa thèse de doctorat *Logique et mathématiques du continu chez Charles Sanders Peirce* (soutenue à l'Institut Jean-Nicod, Paris, EHESS et CNRS, en septembre 2006) ; relevons également le récent Workshop *Peirce The Mathematician* (Imatra, Finland, 11-13 June 2010), [Moore 2010*a*] et [Moore 2010*a*]).

[102] Pour reprendre là l'expression "exact philosophy" de C. Eisele, utilisée dans son article "Mathematical methodology in the thought of Charles S. Peirce", *Historia Mathematica*, volume 9, issue 3 (1982), 333-341. [Eisele 1981] et [Eisele 1982].

bien au contraire, dans un premier temps elle ne retiendra pas son attention[103] ; les raisons de ce revirement tardif de Peirce et de son véritable engouement presqu'excessif pour la *Topologie* de Listing demeurent assez obscures.

Peirce propose le *synéchisme* tel une « synthèse du tychisme et du pragmatisme »[104]. Gérard Deledalle, dans la conclusion de son ouvrage *Charles S. Peirce, phénoménologue et sémioticien*[105], retient que le synéchisme « est en fin de compte une philosophie critique du sens commun […] : il prend le monde tel qu'il est, mais, quand il y a doute réel, il s'en remet à l'investigation, à l'enquête scientifique. » (p. 91)

Sans chercher à pénétrer dans l'extraordinaire richesse, la complexité et la subtilité de la partie considérable de l'œuvre directement interpellée par cette approche, on retiendra de la définition du *Dictionary of Philosophy and Psychology* de James Mark Baldwin (*DPP*), que le synéchisme est pour Peirce « cette tendance de la pensée philosophique qui insiste sur l'idée de continuité comme de première importance en philosophie et, en particulier, sur la nécessité d'hypothèses renfermant la vraie continuité »[106].

Le synéchisme est donc proposé tel « la tendance à tout considérer comme continu […] »[107] ; c'est là que la *topical geometry* fera son entrée en scène. Elle dite aussi

[103] Jérôme Havenel, voir [Havenel 2010, 285].
[104] "Recent Developments of Existential Graphs and their Consequences for Logic", [*CP* 4, 584], 1906 ; il écrit à propos de lui : "Synechism is founded on the notion that the coalescence, the becoming continuous, the becoming governed by laws, the becoming instinct with general ideas, are but phases of one and the same process of the growth of reasonableness. This is first shown to be true with mathematical exactitude in the field of logic, and is thence inferred to hold good metaphysically." [Voir [Baldwin II (1902), 322].
[105] [Deledalle 1987].
[106] [Baldwin II (1902), 657]. À propos de ce "vrai continu", il écrit également au même endroit : "A true CONTINUUM is something whose possibilities of determination no multitude of individuals can exhaust. Thus, no collection of points placed upon a truly continuous line can fill the line so as to leave no room for others, although that collection had a point for every value towards which numbers endlessly continued into the decimal places could approximate ; nor if it contained a point for every possible permutation of all such values. It would be in the general spirit of synechism to hold that time ought to be supposed truly continuous in that sense. […] True generality is, in fact, nothing but a rudimentary form of true continuity. Continuity is nothing but perfect generality of a law of relationship. […] In short, synechism amounts […] that continuity is the absence of ultimate parts in that which is divisible ; and that the form under which alone anything can be understood is the form of generality, which is the same thing as continuity."
[107] "Immortality in the Light of Synechism" [1893] (voir [Peirce II (1893-1913) 1998, 1-3] ; voir en particulier, *Introduction*, p. xix-xx. Synechism [Gr. συνεχής, continu, tenir ensemble] ; c'est lui qui proposera ce mot en juillet 1892 dans son article [Peirce 1892, ii, 534] (Voir aussi [*CP* 6, 169]). Ce n'est pas le lieu, nous n'insisterons pas sur le concept du « continu » chez Peirce, ni sur les nombreuses définitions qu'il proposera ; sur la différence entre la « pseudo-continuité analytique » et la « vraie continuité topique » (voir [*NEM* 2, 483-], 'Topical geometry' [MS 137, 1904]). Nous laisserons également de côté son opposition, plus tardive (1908), entre continu « parfait » et continu « imparfait ». Nous renvoyons le lecteur qui le souhaiterait aux études récentes de Jérôme Havenel (qui outre sa thèse déjà signalée, consacrera notamment à ce sujet l'article [Havenel 2008]) et de Matthew E. Moore ([Moore 2008]).

Topics[108] par Peirce, ou encore *Synectics*[109] et parfois même *Topology*[110]. C'est la seule discipline en droit d'être considérée comme « géométrie pure »[111]. La continuité serait pour Peirce la « clef de la philosophie ». C'est là une conviction, confortée par son expérience en mathématiques, qui instruira aussi sa quête d'un « vrai continu » hors de portée des seuls mathématiciens et à substituer à leur « pseudo-continu ». Il cherchera à l'assurer en philosophie, y consacrant une part considérable de ses recherches au cours des années 1895-1913[112]. Cette double perspective ou quête mathématique et philosophique était d'autant plus justifiée, bien que difficile à conduire, qu'elle s'appuyait sur un constat essentiel qui invitait à s'y hasarder : « […] les mathématiciens n'ont jamais découvert de méthode pour raisonner sur la géométrie topique, qui s'occupe de vrais continua. Ils n'ont pas vraiment prouvé la moindre proposition dans cette branche des mathématiques »[113].

---

108 "[…] is the most general, fundamental, and naturally elementary branch of geometry, which neither considers lengths, areas, or volumes in their character of being measurable, nor distinguishes straight from curved or crooked lines, nor place from curved or bent surfaces, but studies only the manner in which the parts of places are continuously connected." (*The Century Dictionary*, *Supplement*, vol. XII, p. 1360).

109 "*Synectics* […] as the science of spatial connections ; pure synectics as the science of the connection of the parts of true continua." (MS. 139, "On synectics, otherwise called Topology, or Topics")

110 "Topology, or I prefer to call it, topical geometry, or still better, geometrical topics, is a subject concerning which everybody ought to know, though few do, the little that has ever been made out. It is the most fundamental and, at the same time, the simplest of the three great divisions of geometry, topics, graphics, and metrics." ([*NEM* 2], ("Algebra And Geometry"), '3. Topical Geometry' (*MS* 137 [1904]), p. 477-547; voir p. 477). Mais, le nouveau vocabulaire introduit par Peirce est tout aussi abondant que chez Listing lorsqu'il critiquera les débordements tant du côté du vocabulaire que des notions mises en valeur. Cependant, il reconnaît aussi "I have, in the main, no new conceptions to propose as superior to those of Listing, whose sagacity in seizing upon the precise ideas that were pertinent still appears strong when his work is compared even with the treatment of somewhat the same subject by so vast an intellect as that of Riemann." (*NEM* 2, 627-8], note 1; extrait de MS (140), "A Treatise on General Topics", [1913]).

111 "By 'pure' geometry I mean geometry as based upon hypotheses, all responsability for the truth of which is self-disclaimed. By 'physical' geometry, I mean geometry as supposed to refer to real, or objectively valid, space." (MS. 139, "On synectics, otherwise called Topology, or Topics".)

112 On ne fera que signaler ici le texte [Panza 1998] et noter avec J. Havenel ([Havenel 2008]) que Peirce, dans "A Note on Continuity" (26 mai 1908) [*CP* 4, 639 à 642] "states that he made a huge step forward to solve the question of continuity […] According to his concept of continuity, "a top[olog]ical singularity… is a breach of continuity". But if the continuum has no topological singularity, then it is a perfect continuum whose essential character is: the absolute generality with which two rules hold good, first, that every part has parts; and second, that every sufficiently small part has the same mode of immediate connection with others as every other has. This manifestly vague statement will more clearly convey my idea (though less distinctly) than the elaborate full explication of it could." (p. 119)

113 "Analysis of the methods of mathematical demonstration" (Draft C - MS L75.90-102 ; voir p. 100). Du côté des mathématiques, on remarquera qu'une telle déclaration illustre assez bien l'ignorance de Peirce des travaux réalisés par Poincaré depuis le milieu des années 1890 (Voir http://www.cspeirce.com/menu/library/ bycsp/l75/ver1/l75v1-02.htm#m4) ; du côté de sa métaphysique, force est de constater que le succès ne sera pas non plus au rendez-vous : "Peirce's illusion: the grand design was never fulfilled. The reason is that Peirce was never able to find a way to utilize the continuum concept effectively. The magnificent synthesis which the theory of continuity seemed to promise somehow always eluded him, and the shining vision of the great system always remained a castle in the air." [Murphey 1993, 407].

Dans la division des mathématiques influencée par Cayley et Klein, revisitée par Peirce, la *géométrie* se partage entre *Metrics*, *Graphics* et *Topics* ; la dernière occupe la place prépondérante : on savait déjà avec Cayley que la géométrie métrique (« la géométrie des éléments ») n'était qu'un problème particulier[114] de la géométrie projective[115], ou de perspective. À la suite de Peirce, « il est facile de voir que la géométrie projective n'est rien d'autre qu'un problème particulier de la géométrie topique »[116].

Pour fonder sa métaphysique, dans l'optique d'une mathématique des « purs continua », Peirce fera donc appel à la *Topologie* de Listing ; c'est aussi pour la reconsidérer et la parfaire[117]. Ce choix n'était pas fait dans l'ignorance du travail de Riemann, qu'il admirait, ou d'autres ; de nombreux passages de son œuvre témoignent de cette connaissance et de son réel intérêt pour le maître. Il est clair cependant que Riemann ne correspondait pas à ses attentes du moment. Il en allait tout autrement avec Listing : « Il n'y a aucun doute possible que la recherche topique la plus importante encore jamais conduite - probablement la plus importante qui ne le sera jamais - est celle de Johann Benedict Listing […] »[118], écrit-il.

On peut encore lire dans son "Analysis of the conceptions of mathematics" (d'après le Draft E - MS L75. 208-209, voir http://www.cspeirce.com/menu/library/bycsp/l75/ver1/l75v1-02.htm#m3) : "Many futile attempts have been made to define continuity. In the sense in |209| the calculus, no difficulty remains. But the whole of topical geometry remains in an exceedingly backward state and destitute of any method of proof simply because true continuity has not been mathematically defined. By a careful analysis of the conception of a *collection*, of which no mathematical definition has been yet published, I have succeeded in giving a demonstration of an important proposition which Cantor had missed, from which the required definition of a continuum results; and a foundation is afforded for topical geometry, which branch of geometry really embraces the whole of geometry. I have made several other advances in defining the conceptions of mathematics which illuminate the subject."
Peirce présente dans les *Cambridge Conferences Lectures* de 1898 un *continuum* tel une « collection d'une si vaste multitude » que ses éléments ne peuvent plus être distingués, qu'ils sont comme « soudés l'un à l'autre » (Voir [Peirce 1992] "Lecture Three", p. 162).

114 "The logic of continuity" (D'après 948, [Peirce 1992, 101-115]) ; où Peirce fait allusion (p. 101) à l'article de Cayley ([Cayley 1859*a*]). Voir également [NEM 2, 623-632], *Appendice* O.

115 Peirce reprend à Clifford l'expression *Graphics* pour désigner la géométrie projective (voir [Peirce 1992] "Lecture Eight : The Logic of Continuity", p. 243).

116 "The logic of continuity"; p. 101. (Voir aussi le Draft C – MS L 75. 129-132 ; en particulier p. 129 : http://www.cspeirce.com/menu/library/bycsp/l75/ver1/l75v1-02.htm#m4).

117 « Si il doit exister un quelconque système formel fournissant la clé du monde synéchistique, c'est la synectique ou topologie. » ([Murphey 1993, 405]). "How are we to establish a method of reasoning about continuity in philosophy ?" ("The Logic of Continuity" p.1 ; cité par [Murphey 1993, 405]) ; I find that when a continuum is met with, it does not suffice for the purposes [of] objective logic to say that the objects are continuous, it is necessary to examine the special nature of the continuum minutely. Its dimensionality must be ascertained, its Listing numbers, its singularities. ("Considerations for Eight Lectures," p. 2 ; cit. [Murphey 1993, 40])

118 [*NEM* 2, 493], "Topical geometry". On a vu que ce point de vue avait déjà été partagé par d'autres, notamment par Maxwell. Dans le cas de Peirce, outre le fait qu'il s'intéressera au développement historique de cette discipline, on ne saurait trop insister sur le fait qu'il connaissait aussi d'autres travaux topologiques que ceux du seul Listing, contrairement à ce que semble nous laisser croire par exemple J. Jay Zeman lorsqu'il écrit : "There is no doubt whatever

> Listing,… le père de la topique géométrique, […] a inventé une méthode très artificielle de penser les continua, sur laquelle le grand Riemann est indépendamment tombé lors de la considération de la connexité des surfaces. Mais Riemann ne l'a jamais suffisamment étudiée pour la maitriser en profondeur[119].

Peirce accorde volontiers à Listing d'avoir réussi avec le *théorème d'Euler* là où des « héros » tels que Euler et Legendre[120] ont échoué ; mais c'est aussi pour insister sur les limites et les faiblesses de son entreprise[121] et pour aboutir, comme dans le cas de Legendre, au caractère « insatisfaisant » de la démonstration[122]. L'extension de Listing, qu'il appelle à son tour le *théorème de Listing*, doit être reconsidérée afin de pouvoir tenir compte de « nœuds » et de « chevauchements »[123] ; et parvenir ainsi au dit *théorème de Peirce-Listing*.

Le *Vorstudien zur Topologie* est essentiel pour Peirce ; il est pour lui suffisamment « simple » pour être recommandé en première lecture aux étudiants qui souhaitent poursuivre des recherches en théorie des nœuds, avant d'aborder les travaux plus avancés de Tait puis ceux de C. N. Little[124].

---

that Peirce in his later years was fascinated by topology, even though the only topology he knew was that of Listing, which was a rather low octane brand." ([Zeman 1964], Introduction]).

Cependant, on peut aussi en partie convenir avec Murphey : "The topology which Peirce possessed was hopelessly inadequate to the demands he made upon it; the topology Peirce needed was still a thing of the future, and when it was discovered it was to be developed on principles diametrically opposed to his." [Murphey 1993, 405].

119 "The logic of continuity" ([Peirce 1992, 111-112]).

120 Peirce revient lui aussi sur la proposition 25 des *Éléments de géométrie*. Voir par exemple [Legendre 1823, 226-227] : « Cette proposition est maintenant donnée comme théorème dans tout manuel de géométrie, étant la seule proposition de la *Topics* que de tels livres renferment, à moins qu'ils ne mentionnent que l'espace a trois dimensions. Les *Éléments de géométrie* de Legendre sont le premier manuel dans lequel il trouve place. Legendre donne une tentative de preuve de ce théorème qu'il reconnaissait lui même comme défectueuse. »

Pour Peirce la démonstration de Legendre « n'est réellement pas satisfaisante » ([Draft C - MS L75, p. 130] ; voir http://www.cspeirce.com/menu/library/bycsp/l75/ver1/l75v1-02.htm#topofpage).

On s'étonnera au passage de ne pas voir figurer dans sa courte liste des devanciers le nom de Cayley, dont il connaît pourtant très bien les travaux. D'après Ahti-Veikko Pietarinen : "It is also possible that Peirce wanted to defend Listing so sternly that it drove him into an unjust downplay of Arthur Cayley ([*RLT*, 246])." (Voir [Pietarinen 2006, 160]).

121 "This method is not all that could be desired for continua of more than 3 dimensions, which Listing never studied." ("The logic of continuity"; d'après 948, [Peirce 1992, 112]). Rappelons que pour Peirce : "Pure Topics is not limited to Space of three dimensions but is the full account of all forms of Continuity. Insofar as it is limited to Space, it is the complete account of all the properties of Space itself." (*NEM*, "Appendice O. An attempt to state systematically the doctrine of the census in geometrical topics, or topical geometry, more commonly known as 'Topology'; being, a mathematico-logical recreation of C. S. Peirce. Following the lead of J. B. Listing's paper in the *Göttinger Abhandlungen*" (MS. 145, [avril-mai 1905]), p. 626). Il faut néanmoins observer que Peirce, à l'instar de Listing, ne poussera pas vraiment ses recherches au delà de la troisième dimension.

122 Draft C - MS L75, p. 130.

123 [*NEM* 2, 190-191].

124 [*NEM* 2, 310], MS 94, "Book II *Topology*".

Le *Census* est bien sûr plus considérable à ses yeux, au-delà du fait qu'il renferme le « curieux » et « important théorème du Cens » ; il affirmera à propos de ce dernier l'avoir « amélioré », accordé avec les « idées modernes » et y avoir ajouté une étude des « singularités des places »[125].

Pour Peirce, la *Topics* présupposait nécessairement les propriétés du temps[126], mais nous passerons outre le rappel de cette nécessité et de ses exigences dont l'étude a déjà très largement été abordée par d'autres, notamment par plusieurs des commentateurs déjà évoqués précédemment ; nous retiendrons simplement ici des emprunts faits par Peirce à la théorie de Listing, et quelques unes des extensions et améliorations qu'il proposera ou envisagera.

Clarifier les concepts de Listing et en introduire de nouveaux, démontrer le *théorème du Cens* et le généraliser, supposera d'abord pour Peirce en revenir dans ses *Eléments de mathématiques*[127] (MS. [165]) sur la « continuité » et l'« homogénéité » de l'espace, sur sa « tridimensionnalité », relever les « singularités » et aborder « les classes topiques de surfaces ». Ce sont là les cinq premières sections du chapitre qu'il consacre à la « géométrie topique »[128] ; sa sixième et dernière section (« Le Cens topique ») expose le problème de « déterminer la connexion entre les nombres de points, lignes, surfaces et espaces relevés en toute configuration ». Peirce redéfinit les *nombres de Listing* (encore appelés plus brièvement *Listings*) ; ils sont au nombre de quatre : la *chorisy*, la *cyclosy*, la *periphraxy* et l'*immensité* ou *apeiry*, ainsi nommés par lui. Ils étaient déjà présents chez Listing : soit nommément désignés (*Cyklose* et *Periphraxis*), soit évoqués sans être nommés ou simplement sous-entendus (*chorisy* et immensité) ; repris par Peirce ils seront cependant plus généralement introduits et définis

[125] À nouveau il insiste sur l'importance de Listing, qui « a de loin surpassé » Riemann. [*NEM* 2, 627], *Appendice* O. Voir également les remarques extraites du MS. 140 ("A Treatise on General Topics", note 1, p. 627-628). On peut mesurer à quel point Peirce était très proche de l'œuvre dans sa "Letter to Lady Welby" (datée du 16 décembre 1904, [*L463*]), par exemple dans l'extrait suivant :"[I] am now as completely unable to say what is mine and what is Listing's as any third party could be, although I know that certain things are Listing's and that certain things are mine. […] I know that all exact definitions and the whole doctrine of singularities is mine, and the discovery that there are several different census theorems, together with other relations between Listing numbers." ([Hardwick 1977])

[126] En effet, il écrit : "This is *Topics*. It thinks of fixed Places, and of Objects called *Movables*, occupying each some fixed place at each instant of Time, and capable in Time of displacement with deformation, called Motion, by which in the course of a lapse of time, it occupies another place, which it is thus said to *generate* (and I may now adopt the word *traverse*, also), it being understood that if the movable retraces any part of its wake, going over it in reversed order, it thereby undoes its work of generation in that part, *ungenerates* (or *untraverses*) it. And this *motion* of generation is such that at every instant the Movable occupies a Place, and at no instant occupies two different places simultaneously, as it would if it made a *saltus*. Nor does it alter the dimensionality of its instantaneous place, except in singular cases, called *Extraordinary Limiting Deformations*. It is thus evident that Topics must begin with an account of the properties of Time." ([NEM 2, 625-626], *Appendice O*).

[127] *Elements of Mathematics* [c 1895] (voir [*NEM* 2, 1-232])

[128] Voir "Topical Geometry" ([*NEM* 2, 165-191], MS [165]).

La *Cho'risy* [du grec χώρισιζ, séparation] est le nombre de parties simples d'une place de même dimensionnalité que la place elle-même qui doit être remplie en sorte de ne laisser aucune place à une simple *particule* (plus simplement dit, c'est le nombre de morceaux séparés.)

La *Cyclo'sy* est le nombre de parties simples d'une place de dimensionnalité moindre de *un* que celle de la place elle-même qui doit être remplie en sorte de ne laisser la moindre place à un simple *filament* qui ne pourra être géométriquement capable de se réduire indéfiniment à un point par un mouvement ordinaire dans la place inoccupée.

La *Periphrax'y* est le nombre de parties simples d'une place de dimensionnalité moindre de *deux* que celle de la place elle-même qui doit être remplie en sorte de ne laisser la moindre place à une simple *pellicule* qui ne pourra être géométriquement capable de se réduire indéfiniment à une ligne ou à un point par un mouvement ordinaire dans la place inoccupée.

L'*A'peiry* [ou *Immensity*] est le nombre de parties simples d'une place de dimensionnalité moindre de *trois* que celle de la place elle-même qui doit être remplie en sorte de ne laisser la moindre place à un simple *solide* qui ne pourra être géométriquement capable de se réduire indéfiniment à une surface, à une ligne ou à un point par un mouvement ordinaire dans la place inoccupée[129].

[129] [*NEM* 2, 500], MS (137) "Topical geometry" [1904]. Vers le milieu des années 1890, Peirce avait déjà proposé d'autres définitions de ces nombres de Listing (Voir par exemple dans [*NEM* 2, 186], MS (165), et [*NEM* 2, 280-281], MS (94) ; ou encore celles qu'il destinait au *Century Dictionary*, voir [*NEM* 2, 631-632] Appendice P. ["Census" from Century Dictionary with model], note 1, où on peut lire à propos de ces nombres :"*Listing's numbers*, four numbers which serve to define certain topical characters of any geometrical figure especially a figure without topical singularities. Though there are only four for space of three dimensions there will be one more for each added dimension. These numbers express the number of simple nonsingular interruptions of a continuous place that are requisite in order to enable an object filling that space to shrink to a nothing without breaking and without leaving the space. […]" [p. 632]).
On ne trouve pas une telle entrée dans le *Century Dictionary*; en revanche, dans le *Dictionary Supplement* (vol. XI, [1911]), figurent celles de l'*Apeiry* (p. 62) et de la *Chorisis* (p. 243) dues à Peirce : "Apeiry. … In geom. topics, a number associated with a place of three or more dimensions and indicating how many places it contains for unbounded solid bodies that have no room within to shrink to nothing […]"; "Chorisis, … In geom., a number associated with a place which indicates how many different places it contains, such that a particle could not by an ordinary motion within it pass from one to another. […]" Dans une lettre de Peirce à William E. Story (datée du 22 mars 1896), on pouvait également lire : "The Listing numbers I define a little differently from Listing, and get different numbers for space because I conceive of space as perissid while he virtually makes it artiad. When he talks of 'all space,' he only means the parts at finite distances. It is really limited, though he calls it unlimited, because he wrote before Riemann, and confuses the infinite with the unlimited." ([NEM 2, vii], Introduction). Notons également que dans sa huitième conférence de Cambridge (1898) il écrit que "Listing himself makes the Cyclosis and Periphraxis of space equal to zero, showing how little he knew of mathematics." (Voir [Peirce 1992, 257]). C'est à l'occasion du problème de coloriage des cartes géographiques que Peirce introduira aussi de nouveaux mots pour designer une surface divisée en régions et limitée par une ligne, ou illimitée : « Si elle est illimitée et sépare un solide en deux parties, je l'appelle artiade [*Artiad*] ; si non, je l'appelle périsside [*perissid* ; parfois il utilise aussi le mot *perissad*] » ([*CP* 5, 490]) ; voir aussi MS 318. Pour l'explication de Peirce sur le choix de ce vocabulaire, voir [*NEM* 2, 175], MS [165], *Gloss* 20). À ce propos, on trouve dans MS (94) les définitions suivantes : "*Definition* 97. A *perissad* surface is a closed surface on which any number of lines may be drawn, every pair of these lines cutting one another in an odd number of points, all such points being distinct.
An unbounded plane is an example of such surface.

Une fois donnée et abondamment illustrée la définition du « Nombre de Cens », il est conduit à un énoncé plus ramassé du « théorème du cens » qu'il ne cherchera pas à démontrer : le nombre de Cens d'un tout est la somme des nombres de cens des listings de ses parties. À nouveau il se contentera d'illustrations, et d'allusions historiques succinctes se rapportant aux contributions d'Euler, Legendre et Listing[130].

Peirce entend tirer le meilleur parti des apprentissages du *Census* de Listing : il cherche à la fois à en combler les lacunes et à atteindre une beaucoup plus grande généralité ; mais il convient aussi que le théorème formulé par Listing ne règle pas toutes les situations, même restreint au seul cas des complexes spatiaux[131]. Il relèvera à son tour le « caractère inextricable », particulièrement obscur parfois, des relations entre les éléments des curies ; mais c'est avant tout sur l'absence de prise en considération des singularités qu'il s'appesantit, qui lui fera conclure tant à l'insuffisance de l'approche de Listing qu'à celle de Riemann[132].

Definition 98. An *artiad*, or *globular* surface is a closed surface upon which every pair of self-returning lines intersect an even number of times, zero being considered as an even number." ([*NEM* 2, 283]) Il présente le plan projectif tel une surface "*perissid*, not an artiad" ([*NEM* 2, 490], MS [137]), et il définit au même endroit une *ligne périsside* comme "line along the length of which its surface [i.e. celle où elle se situe] makes an odd number of half-twists."; la « bande de Möbius », qu'il ne nomme pas ainsi, est à plusieurs reprises utilisée comme illustration (voir par exemple : [*NEM* 2, 490-1 et 507], MS [137] ; [*NEM* 2, 179 et 223], MS [165] ; [*NEM* 2, 262], MS [94]). Il relève que "Many writers call perissid surfaces one-sided surfaces. One objection to this is that it goes beyond the surface to what is outside of it in order to designate a character intrinsic to the surface. What if the surface were a universe by itself ?"([*NEM* 2, 491], MS [137])

Précisons enfin le prolongement de ses définitions à l'espace : "A space which contains no boundless surfaces but artiad surfaces is called an *artiad* space. A space which independently of singularities, etc., contains a boundless perissid surface is called a *perissid* space." ([Moore 2010*b*, 237]).

130 "The Census Number of a place is the number of its separate pieces limited by singularities which is called its chorisis, less its cyclosis, plus its periphraxis, less its immensity, this number being diminished by that of its limiting singularities, itself diminished by the number of their singularities, etc. But if the dimensionality of a singularity is two less than that of the place, it is to be added, not subtracted.", [*NEM* 2, 186], MS (165), voir les illustrations" (p. 186-188).

131 Peirce écrit : "For instance, the Census-theorem would permit a net upon a spheroidal surface having twelve pentagonal faces, or regions, one hexagonal face, twenty-two coigns, and thirty-three boundaries. But this is easily seen to be impossible" (MS 141, "On Topical Geometry, in General"; cité d'après [Murphey 1993, 206, note 45]).

132 Peirce reconnaît toujours qu'après le système des « Nombres de Listing », le « Théorème du Cens » est la contribution la plus importante de Listing ; mais c'est cependant pour préciser aussi : "The census-number of a place is a number depending in such a way upon the four Listing numbers of the place that the census-number of the whole is equal to the sum of the census-numbers of the parts. Such being the idea of the census-number, the census-number of a place should and must depend upon the singularities of the place; but Listing, if he ever had the conception of a topical singularity, very fortunately set it aside. Regarding a surface as the limit of a solid, a line as the limit of a surface, and a point as the limit of a line, and never stopping, apparently, to ask himself whether an interruption (or limit) of an interruption was or was not an interruption of the first place, he simply conceived of all places as interrupted at their bounds and at their branchings. He thus obtained an easily manageable problem. Denoting by p^0, p^1, p^2, p^3, the points, lines, surfaces, and solids of a figure, and by X, K, Π, A, the chorisy, cyclosy, periphraxy, and apeiry, respectively, he found, very easily, that the census-number must be

> Par *singularité topique*, *B*, d'un lieu, *A*, j'entends que *B* est un lieu de dimension moindre que *A*, et contenu dans ou à la limite de *A*, et que de *B* des particules, filaments ou films peuvent se mouvoir le long de *A*, selon plus ou moins de voies que de la majorité de lieux de même dimension que *B*, et suffisamment proches de lui[133].

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}p^3 - \Pi\, p^3 + \mathrm{K}p^3 - \mathrm{X}p^3 \\ &\quad + \mathit{\Pi}\, p^2 - Kp^2 + Xp^2 \\ &\qquad + \mathrm{K}p^1 - \mathrm{X}p^1 \\ &\qquad\quad + Xp^0. \end{aligned}$$

The utility of the theorem that the census-number of a whole, so defined, equals that of its parts is very great." ([*NEM* 2, MS (137), 505]).

[133] Cette définition est extraite de [*NEM* 2] ; on la trouve dans une lettre datée du 22 mars 1896, adressée à William E. Story. Elle est proche de celle de 1904 (MS 137 [1904] ; voir [*NEM* 2, 497]), mais de prime abord semble moins moderne par sa distinction explicite de concepts tels ceux de *particules*, *filaments* et *films* et par son expression « suffisamment proche », peu précise : "A *topical singularity* of a figure or a place, *P*, is a place, *L*, within *P* and of lower dimensionality than *P*, such that a movable object occupying *L* can move away from it in a separative motion so as to begin to generate a part of *P*, and do this in fewer or in more ways (that is, can generate, a smaller or greater number of entirely separate parts of *P*) than an object of the same dimensionality as *L* moving in like manner away from any neighboring place in *P*. The *grade* of singularity (which may also be called [p. 498] the singularity) is the product of the excess of the number of such beginnings of generation over those of an ordinary place in *P*, by the excess of the dimensionality of *P* over *L*." Dans le même texte de 1904, Peirce dira à nouveau que "The census-number of a place depends greatly upon its singularities" et insistera une fois encore sur le caractère restreint de l'étude de Listing : "Listing, however, avoids considering them by always making interruptions at the singular places". Mais lui-même ne les abordera pas dans son écrit, pour ne pas trop l'étendre, et va jusqu'à proposer à d'autres de poursuivre l'étude de ce « fascinant sujet ». À cette intention il introduira une nouvelle notation, qui devrait remplacer avantageusement celle trop restrictive de Listing :

NOTATION

C, census number of –

X, *K*, *Π*, *A* ; unit of chorisy, cyclosy, periphraxy, apeiry.

χ, κ, π, α ; numerical value of chorisy, cyclosy, periphraxy, apeiry.

p, *q*, *r*, *s* ; point, line, surface, space.

Subjacent numbers attached to p, q, r, show that the point, line, or surface is a singularity of that grade belonging to what is described in the following letters. Thus p2q1r0s would be a point of crossing of two three-way splits of any outlying surface considered as a singularity of a solid. A brace is used where the singularity belongs to the place of meeting of different kinds of places and a letter may be repeated to show that the same place has different characters as belonging to one or another place. Thus

$$p\begin{Bmatrix} p_1 & q_{-2} \\ & p_0 \end{Bmatrix} r$$

Le survol opéré ici exclut bien sûr de développer plus avant l'approche de Peirce, bien qu'elle mériterait enfin de l'être plus complètement et dans le plus minutieux détail ; signalons cependant sa distinction de l'*ordinaire* du *singulier* d'une place :

> An *ordinary place of a place* is a place in the later place from which the modes of departing movement are the same as from innumerable other places in its neighborhood in the same place (...). A *singular place of a place* is a place within the later place from which the modes of departing movement are fewer or more than from ordinary places of the same dimensionality[134].

Elle l'amènera ainsi à définir les «points singuliers» d'une ligne (*Artiad nodes* ou *crunodes*, *perrisid*), d'une surface, etc., à aborder les « lignes topiquement singulières » d'une surface (*artiad nodal lines, perissid lines*)[135].

Sa classification des singularités n'aboutira pas : sortir de l'« inextricable » de Listing n'était pas chose aisée. Bien qu'il va y consacrer une part considérable de son activité, ainsi qu'en témoignent par exemple ses *Cambridge Conferences Lectures* (1898), il ne parviendra pas à étendre sa classification avec le même succès, au delà des points et des lignes, aux surfaces et à l'espace[136]. La valeur de son travail sur les singularités est indéniable ; outre celle-ci, on lui reconnaîtra aussi quelques autres contributions, vues comme autant de *trouvailles* ou *incursions topologiques* qui auraient sans nul doute pu lui permettre de figurer dans une histoire de cette discipline[137], même si elles ne font pas de lui un des pères de la topologie. Plusieurs voix se sont élevées, parmi les plus récentes celles de Murray G. Murphey, António Machuco Rosa[138] et de Jérôme Havenel[139], pour défendre l'importance du travail de Peirce en la matière. Peirce va en effet plus loin que Listing : avec lui le nombre de cens permet de classer les complexes spatiaux,

---

would mean a point which is a three-way furcation of an outlying line of a surface intersecting that surface at an otherwise ordinary point of it.) […]" ([*NEM* 2, 546])

[134] [*NEM* 3, 1079]. On trouve également cette autre définition : "A topically singularity of a place is a place within that place from which the modes of departure are fewer or more than from the main collection of such places within the place." ([*NEM* 3, 108])

[135] Pour une description plus détaillée, voir par exemple [*NEM* 2 173-177], (MS (165), [*ca* 1895] "10. Topical Geometry", "Section 4. Singularities"; [*NEM* 2, 497-500], MS (137), [1904] « Topical Geometry », [Variant A, 1] ; [*NEM* 3, 974, 1082, etc.]

[136] [Murphey 1993, 207]. On ne dira rien sur le fait qu'il envisagera d'aller au delà de la dimension trois.

[137] Ainsi que l'écrit Murphey : "what Peirce thought about topology is more important than what Peirce did in topology […]" ([Murphey 1993, 211]). Insistons sur le rôle considérable qu'il veut faire jouer à sa *Géométrie topique*, dont il s'est fait le chantre et le défenseur en stigmatisant sa situation trop longtemps figée, négligée, et en dénonçant une certaine impuissance des mathématiciens à la faire progresser. Mais, il n'est sans doute pas excessif de rappeler aussi que ces efforts méritoires en topologie plus ou moins aboutis ne demeurent qu'une modeste partie prenante dans l'intérêt supérieur que Peirce a pour la logique, la philosophie et la métaphysique, dans ses visées qui allaient bien au-delà de son intérêt de faire progresser la chose mathématique.

[138] [Machuco Rosa 1993].

[139] [Havenel 2008] et [Havenel 2010].

on lui doit l'introduction d'une notion de "shape-class"[140] proche de celle de « classe d'homotopie »[141]. Au-delà de premières reprises et clarifications instructives de l'œuvre de Listing déjà évoquées, on lui doit aussi des notions introduites pour la généralisation du théorème de Listing. Sa quête l'a naturellement poussé à approfondir les notions de connexité, de dimension et d'extension à l'infini, en vue de préciser les fameux « attributs » de Listing. C'est ainsi qu'il améliore la prise en compte effective de l'infini en revisitant et clarifiant le rôle ambigu qu'y faisait jouer Listing à son ω (le *Trema*), qui figure dans sa célèbre formule

$$a-(b-x)+(c-x'+\pi)-(d-x''+\pi'-\omega)=0$$

considérée comme „allgemeinste oder finale Form für die Census-Gleichung“[142].

Les exigences de la philosophie de Peirce, dont la part considérable prise par le « continu », l'obligeront bien sûr à ne pas en rester à ces premiers pas. On en perçoit

[140] Il écrit : "Two places may be said of the same shape-class if and only if it is possible for a thing precisely occupying the one to come by a mere movement, strict or otherwise, to precisely occupy the other." (Extrait de *Rough Sketch of Suggested Prolegomena to your* [*James Mills Peirce's*] *First Course in Quaternions* ([*NEM* 3,1080-], MS (87) [1905?]). Murphey voit dans l'introduction de cette notion "a term invented by Peirce rather than by Listing, and one which gives strong evidence that Peirce had conceived at least some of the ideas involved in modern topology." ([Murphey, 1993, 200]) Ce qu'écrit Peirce à propos de ses *Listings* montre la généralité de leur conception : "Listing's numbers are certain quantities measuring the degrees in which any place possesses separativiness of different kinds, where by separativiness is meant something exemplified in the action of any two-sided closed surface in separating all space into two parts, these numbers together with the singularities and the dimensionality sufficing to distinguish all shape-classes" ([*NEM* 3, 1080-1]).

[141] [Havenel 2010, p. 304].

[142] [Listing 1861, Art. 44, 171]. On relève dans le *Census* les déclarations suivantes : „Um an einer *periphraktischen*, d. i. allseitig geschlossenen, aller Begrenzung durch Linien und Punkte ermangelnden Fläche das Diagramm abzuleiten, muss derselben, […], eine virtuelle Grenze ertheilt werden, wozu wir am einfachsten einen beliebigen Punkt derselben wählen. Dieser Aufhebung der Periphraxis geben wir die Benennung *Diatrese* oder *Trema*.“ (Art. 24, p. 136) ; „das räumlich Unendliche die Rolle eines Punktes spielt,…“ (Art. 43, p. 171) ; „Es geht aus dieser Betrachtung hervor, dass wir das räumlich Unendliche als einen in unendlicher Ferne gelegenen virtuellen Punkt zu betrachten haben, der unter den Attributiven des Census ebenso nothwendig eine Aufnahme erheischt, wie die Cyklose und die Periphraxis, und dass wir folgerichtig die in der Gleichung (34)

[à savoir :

$$(a-x^0)-(b-x')+(c-x''+\pi')-(d-x'''+\pi'')=-1$$

(Art. 42, „Weitere Verallgemeinerung des Census", p. 170)]

noch übrige diakritische Zahl -1 in der Bedeutung des räumlich Unendlichen zunächst in das Attributiv der vierten Curie aufnehmen müssen.“ (Art. 44, „Der allgemeine Census in seiner finalen Gestalt“, p. 171).

„Den in unendlicher Ferner zu denkenden, das Unendliche repräsentierenden Punkt nennen wir das *Stigma*.“ (Art. 44, p. 171-172)

Pour en savoir plus sur ce que dit Listing à propos de ω, on peut se reporter également aux quelques éléments d'analyse et aux commentaires rencontrés dans [Pont 1974*a*, 54-56] et [Havenel 2010].

mieux la raison par exemple à travers la distinction sur laquelle veut insister Havenel entre les deux approches de la continuité où la topologie a son mot à dire, sur cette tension voulue entre « continuité externe » [*external continuity*] et « continuité interne » [*internal continuity*][143] : la première est affaire de théorème du cens et de “shape-class”, et peut être investie par une topologie à la Listing, ou qui s’en inspire suffisamment, ou par une topologie à la Riemann ; la seconde, concerne le mode de *connexion immédiate*[144] des parties d’un « *continuum* »[145]. Peirce aura soin d’introduire une notion de « synésis »[146] : cette « propriété qui ‘mesure’ la non séparabilité d’une surface [par exemple], c’est-à-dire ce qui ne sépare ou ne disjoint pas une telle surface »[147]. C’est là une propriété caractéristique du « tenir ensemble », qui s’écarte dans l’esprit de la voie ouverte par Listing. Toujours suivant l’exemple d’une surface, elle est définie comme :

> […] le nombre de lignes non-singulières qui peuvent être tracées sur une simple partie de surface tout en laissant la possibilité qu'un point puisse se déplacer continûment sur cette partie de n'importe quelle position à toute autre, sans traverser l'une de ces lignes. Ou, elle peut être définie comme le nombre de rétrosections [*self-returning cuts*] qui peuvent être faites dans la surface sans pour autant augmenter le nombre des parties[148].

Peirce observera enfin que « la synesis ne peut pas être définie en termes de « connexité » de Riemann (...). La synesis ne peut… pas être définie en termes de cyclose et périphraxis de Listing, malgré la valeur de ces conceptions quelque peu artificielles »[149].

[143] [Havenel 2008, p. 120]
[144] C’est nous qui soulignons.
[145] Havenel ([Havenel 2008,120-121]) relève, en citant Peirce, que la nature des différences entre continua “depends on the manner in which they are connected. This connection does not spring from the nature of the individual units, but constitutes the mode of existence of the whole.” ([*CP* 4, p. 219], “Multitude and Number” [c. 1897])
[146] On trouve encore de nos jours les définitions suivantes : « Synèse. *S. f.* t. de rhét. Jonction de deux choses » (Dict. universel de la langue française, avec le latin et le latin et les étymologies, par Pierre-Claude-Victor Boiste,… 8e éd., Firmin Didot : Paris, 1836) ; il désigne un « assemblage régulier de mots (1842) » (TLFi) ; Synèse, subs. Féminin, « Élém. tiré du gr. σύν “ensemble, en même temps, avec”, entrant dans la constr. de nombreux adj. et subst. de la lang. sc. et techn., ainsi que de la lang. cour. I. − [Le 2e élém. est de type verbal et exprime un procès ; *syn-* signifie “avec une autre chose ou une autre personne, en même temps qu’une autre chose” et caractérise le procès] » et « *synèse* (de σύνεσις “réunion”), subst. fém. (CNRTL). Selon http://www.encyclopediefrancaise.com/Synesis.html, Le *Synesis*… signifie l’unification, réunion, sens, conscience, perspicacité, réalisation, esprit, raison. »
[147] [Machuco Rosa 1993, 330], où l’auteur reprend aussi un autre exemple de Peirce : “The connective valency of a line, or linear configuration, is the number of separate pieces less the number it can be cut (through) without increasing the number of separate pieces.” [*NEM* 2, 282-3].
[148] [*NEM* 3, 471].
[149] [*NEM* 3, 471]. Ces insuffisances dénoncées, il doit néanmoins se rendre à l’évidence de la situation existante : “In constructing the conception only rimmed surfaces were contemplated, and perissad surfaces seem to he been overlooked, so that while the conception admirably answers the special Analytical Purpose which its first proposer, Riemann, had in view, it does not very philosophically classify the closed and perissad surfaces. The rule for the measure of connectivity as stated in works on Riemann’s theory is not quite consistent, though sufficiently so for that problem. It is, therefore, here necessarily a little modified. A still further improvement of the conception seems desirable; but

Ainsi, les *Listings* (« ces conceptions quelque peu artificielles ») tels qu'ils étaient caractérisés ne suffisaient plus ; Chorisy, Cyclosy, Périphraxy,…, même si elles font alors toujours l'objet d'explications dans ses écrits, ne conviennent plus dans la nouvelle approche[150] : « elles ne constituent pas la manière la plus commode de prendre en compte la valence de connexion [*connective valency*] des places »[151].

Peirce a bien été l'élève attentif des principaux artisans de la topologie combinatoire ; il aura le mérite d'aborder avec quelques réussites des notions essentielles, de corriger les insuffisances de la contribution de Listing, le mérite de dépasser plusieurs des limites de ce *Census* qui l'a principalement guidé dans ses premiers pas et invité à

---

the introductions of the conceptions of *cyclosis* and *periphraxis* do not fill the want. The truth is that the best way of arranging the ideas of topology has not yet been found out. To start with connectivity seems to be the clearest method yet proposed." ([NEM 2, 290], MS (94)) Une fois rappelées les notions de « circuit » (definition 106, p. 289), de « passage » (definition 107, p. 289) et introduite la "*Definition* 108", "One circuit or passage is said to be *reconcileable* with another if either can be gradually deformed into the other while at no time ceasing to be a circuit nor ceasing to be a passage" (p. 290), il pourra préciser (p. 290, *Scholium* 7) : "*Connectivity* is a character the conception of which was constructed with the view of distinguishing between the different categories of surfaces, and it is greater the more numerous are the *irreconcileable* circuits and passages and is less the more the parts are totally cut away." Il définira donc une "measure of connectivity", puis abordera la démonstrations des théorèmes qui s'y rapportent ; viendront enfin des exercices, dont le suivant (p. 293) : "Find out the connectivity of the surface of a single strip of paper with ends pasted together after half a twist. […]

KEY

The connectivity of the surface of a single strip of paper with ends pasted together after a half twist is 2. For if the strip be cut across, two cross-cuts are made in the surface, one on each side of the strip. The result is 2 simply connected surfaces, one on each side of the strip. The connectivity of these is, by the rule, 2 added 2, the number of boundaries, and diminished by 4, or twice the number of separate surfaces. This makes 0; but the two cross-cuts diminished the connectivity by 2, so that it must have been 2 originally. […]"

150 Voir le paragraphe 3.2.1 consacré à la notion de « connectivité » (nous reprenons là l'expression utilisée par Machuco Rosa pour la distinguer de celle de « connexité » qui nous est familière aujourd'hui et qui est précisément définie en mathématique), où on peut lire que « Peirce s'est aperçu très vite que les notions de cyclosis, periphrasis, etc, définies en fonction des coupures qui rendent une surface simplement connexe (contractile en un point), n'étaient pas le bon critère pour rendre compte de la 'vraie' connexion d'une surface. » ([Machuco Rosa 1993, p. 329])
Rosa est proche ici, à sa manière, du point de vue qui sous-tend la distinction de Havenel. À propos du mot « connectivité » en géométrie (la « qualité de ce qui est connexe »), notons qu'il ne figure pas dans les dictionnaires (selon le *Trésor de la Langue Française informatisé* (TLFi ; http://atilf.atilf.fr/). Néanmoins, « la *connectivité* en géographie rend compte des *connexions* qu'offre un lieu pour relier les autres lieux de son environnement. » (selon *Wikipaedia*). Toujours selon cette dernière : « Contrairement au cas de la notion de *connexité* on ne dispose pas de définition univoque de la *connectivité*. »

151 [*NEM* 2, 281]. La « valence de connexion » est plus généralement définie comme suit : "The connective valency of a place is the number of the simplest bounded places of the same dimensionality to which it is equivalent in preventing the collapse of unbounded boundaries within it, both as it is and after it has been interrupted in various ways." Son frère James Mills Peirce, professeur de mathématiques à l'Université de Harvard avec lequel il a notamment participé à la rédaction des *New Elements of Geometry based on Benjamin Peirce's Works and Teachings* [MS 94], dira de cette définition qu'elle est « très obscure », qu'elle requière « beaucoup d'explications et d'illustrations » ; il admettra aussi qu'il serait sans doute « préférable de donner cette définition générale plus tard », après en avoir « examiné les cas particuliers ». (p. 281, note 49)

ce dépassement[152]. Mais l' « outil » qu'il entendait parfaire et mettre au service de sa philosophie des continua le poussera en une autre voie où les objectifs subordonneront trop étroitement sa géométrie topique à d'autres horizons et l'en détourneront tout en le privant d'être à son tour un maître en topologie.

Bien qu'il demeure à un niveau tout aussi élémentaire que celui de Listing, on constate cependant que Peirce est plus instruit de topologie que lui ; on peut certes lui reprocher d'ignorer, alors qu'il dénonce le long silence des mathématiciens, ce que sont en train produire d'autres maîtres tels que Poincaré. Il est clair que l'œuvre topologique publiée de Listing, plus précoce, initiatrice et ramassée en quelques rares articles, marquera plus considérablement ses contemporains et successeurs immédiats.

Peirce souhaitera justement que l'on célèbre le nom de Listing comme celui du « père de la géométrie topique »[153], mais l'histoire n'en retiendra pas la leçon : Listing est longtemps resté absent de la plupart des ouvrages qui traitent de l'histoire de la topologie. Ce n'est que tardivement qu'il en ira autrement : aujourd'hui bien mieux connu pour d'autres succès en d'autres disciplines il occupe cependant, outre la *Préhistoire de la topologie algébrique* de J. C. Pont[154], une place conséquente dans *Möbius and his band*[155], dans *History of Topology*[156] ou encore dans le *Handbook of the History of General Topology*[157].

En revanche, le flot des idées et des théories développées par Peirce, dispersées au gré de maintes reconsidérations, n'aura pas le même succès. La plupart de ses écrits topologiques n'ont pas été publiés de son vivant, ou trop tardivement ; instructifs, au delà de leurs seules visées et cause philosophique et métaphysique considérables, ils passeront pratiquement inaperçus et manqueront leur but : aujourd'hui encore toujours point de trace significative de lui dans les ouvrages d'histoire de la topologie, ni même dans les plus récents. Un réel intérêt existe, non pas effectivement ou strictement pour ce que la topologie lui devrait ou lui doit de concepts abstraits, mais surtout pour sa défense de l'importance de la topologie ; pour l'usage qu'il veut faire et fera de cette « géométrie pure », qu'illustrent les derniers éléments que nous venons de mentionner.

Il ne fait aucun doute que beaucoup reste encore à dire de cette œuvre qui aujourd'hui se livre plus que jamais.

---

152 Rappelons qu'il ira jusqu'à écrire que le *Théorème du cens* de Listing est « principalement, sinon totalement, un théorème artificiel » ; et à propos de Listing lui-même : « le peu qu'il savait de mathématiques » ([*RLT*, 257]).
153 [Peirce 1992, 254].
154 [Pont 1974*a*].
155 [John Fauvel, Raymond Flood, and Robin Wilson 1993] ; voir [Biggs 1993], en particulier p. 109-112.
156 [James 1999].
157 [Aull & Lowen 2001].

BIBLIOGRAPHIE

APPEL, Paul, *Traité de mécanique rationnelle*, Paris : Gauthier Villars, 2 tomes, 1893.

AULL Charles Edward & LOWEN Robert (Ed.), *Handbook of the History of General Topology* 3 vol. Kluwer Academic Publishers, 2001

BALDWIN, James Mark (Ed) *Dictionary of philosophy and psychology; including many of the principal conceptions of ethics, logic, aesthetics, philosophy of religion, mental pathology, anthropology, biology, neurology, physiology, economics, political and social philosophy, philology, physical science, and education; and giving a terminology in English, French, German, and Italian*. Written by many hands [**DPP**]; I, 1901; II, 1902; III. 1 et III. 2, 1905).

BIGGS, Norman "The development of Topology", *Möbius and his band* (Edited by J. Fauvel, R. Flood, and R. Wilson). Oxford University Press, 1993, p. 105-119.

BREITENBERGER, Ernst, „Gauß und Listing: Topologie und Freundschaft", *Mitteilungen der Gauss-Gesellschaft*, n°. 30 (1993), 2 – 59.

— "Johann Benedikt Listing", *History of Topology* (Edited by I. M. James), Elsevier Science, 1999.

CARNOT, Lazare, *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803.

CAYLEY, Arthur, *a*. "On Poinsot's Four New Regular Solids" de Arthur Cayley (*The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4th Series, 17(1859) 123-128.

— *b*. "A Sixth Memoir upon Quantics", Philosophical *Transactions of the Royal Society of London*, 149 (1859) 61-90.

— *c*. " On Contour and Slope Lines", *The Philosophical Magazine* 18 (120), (1859) 264-268.

— "On the Partitions of a Close", *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4th series, 21 (1861) 424-8 ([Cayley *CP* V(1892), 62-65]).

— "On Listing's Theorem", *Messenger of Mathematics*, vol. II. (1873), pp. 81-89.

— "On the mathematical theory of isomers", *Phil. Mag.*, vol. XLVII (1874), 444-446.

— *Collected Mathematical Papers* [*CP*], 13 vol., Cambridge: Cambridge University Press, 1889-1898.

DELEDALLE, Gérard, *Charles S. Peirce, phénoménologue et sémioticien*. Foundations of semiotics 14, Berlin: John Benjamins Publishing Company, 1987.

EISELE, Carolyn, “Mathematical Exactitude in C.S. Peirce’s Doctrine of Exact Philosophy », K. Ketner (Ed.), *Proceedings of the C.S. Peirce Bicentennial International Congress*, Lubbock: Texas Tech. University Press, 1981, 155-168.

— “Mathematical methodology in the thought of Charles S. Peirce”, *Historia Mathematica*, volume 9, issue 3 (1982), 333-341.

EPPLE, Moritz, “Topology, matter, and space, I. Topological notions in 19th-century natural philosophy” (*Archive for History of Exact Sciences*, 52 (1998), 297-382.

— “Geometric aspects in the Development of Knot Theory”, *History of Topology* (Edited by I.M. James, North-Holland, 1999) ; chapter 11, p. 301-357.

EULER, Leonhard, « *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* » (*Novi commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae*, VIII, 1736, 128-. [« Solution d'un problème appartenant à la géométrie de position », trad. du latin par M. E. Coupy, *Nouvelles annales de mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, 10, 1851, 106-119].

FAUVEL John, FLOOD Raymond, and WILSON Robin (Eds.), *Möbius and his Band; Mathematics and Astronomy in the Nineteenth-Century Germany*. Oxford University Press, 1993.

GAUSS, Carl Friedrich, *Carl Friedrich Gauss Werke*, Ergänzungreihe IV, *Briefwechsel C. F. Gauss – H. W. M. Olbers, Hidelsheim* - New York: Georg Olms Verlag, 1976.

— *Werke*, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 12 vol., Leipzig-Berlin, 1863-1929. [rééd., Georg Olms Verlag, Hildesheim - New York, 1981. (http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/toc/?PPN=PPN235957348&IDDOC=38910)].

GRASSMANN, Hermann Günther, *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert. Erster Theil: die lineale Ausdehnungslehre enthaltend*. Leipzig: Verlag von Otto Wigand, 1844.

— *Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik*. Leipzig :Weidmannsche Buchhandlung, 1847.

HADAMARD, Jacques, *Œuvres de Jacques Hadamard*, 4 volumes. Paris : Editions du CNRS, 1968.

— « Géométrie de situation et son rôle en mathématique » (Leçon d’ouverture du cours de Mécanique Analytique et de Mécanique Céleste faite au Collège de France, le 18 mai 1909), *Œuvres*, t. II, Edition du CNRS, 1968, p. 805 – 827.

HAVENEL, Jérôme, “Peirce's Clarifications of Continuity”, *Transactions of the Charles S. Peirce Society: A Quarterly Journal in American Philosophy*, vol. 44, N° 1 (Winter 2008) 86-13.

— “Peirce’s Topological Concepts”, *New Essays on Peirce’s Philosophy of Mathematics*, Matthew E. Moore (Ed.), Open Court, 2010, 283-322.

HELMHOLTZ, Hermann Ludwig von, „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche der Wirbelbewegung entsprechen“, *Journal für reine und angewandte Mathematik* 55 (1858), 25-55.

HILBERT, David, « Sur les Problèmes futurs des mathématiques » (traduit de l'allemand par L. Laugel ; l’original de la traduction a paru en allemand dans les *Göttinger Nachrichten*, 1900), *Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens – procès-verbaux et communications* publiés par E. Duporcq, Paris, Gauthier-Villars, 1902

JAMES, Isaac M. (Ed.), *History of Topology*, Elsevier Science, North-Holland, 1999.

FAUQUE de Jonquières, Jean-Philippe Ernest [Ernest Jonquières], *C. R.* 1890, t. 110 : « Note sur un point fondamental de la théorie des polyèdres » (20 Janvier), *C. R.* de L'Académie des Sciences de Paris, 110, 1890, p. 110-115.

— « Note sur le théorème d’Euler dans la théorie des polyèdres » (27 Janvier), *C. R.* de L'académie des Sciences de Paris, 110, 1890, p. 169-173.

— *C. R.* 1890, t. 110 : « Note sur un Mémoire de Descartes longtemps inédit, et sur les titres de son auteur à la priorité d'une découverte dans la théorie des polyèdres » (10 Février) 261-266 ; « Ecrit posthume de Descartes sur les polyèdres » (17 Février), 315-317 ; « Note sur un Mémoire présenté, qui contient, avec le texte complet et revu de l'écrit posthume de Descartes : *De solidorum elementis*, la traduction et le commentaire de cet ouvrage » (31 Mars), p. 677-680.

HARDWICK, Charles S. *Semiotic and Significs: The Correspondence between Charles S. Peirce and Victoria Lady Welby*, Indiana University Press, Bloomington, IN, 1977

LEGENDRE, Adrien-Marie, *Eléments de géométrie.* [Première édition publiée en 1793]. Paris : Firmin Didot, 12e éd. 1823.

LHUILIER, Simon A. J., (Extrait) par M. Gergonne « Mémoire sur la polyédrométrie ; contenant une démonstration directe du Théorème d’Euler, et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 3 (1812-13), 169-192.

— *Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques*, Genève-Paris, 1809.

— « Démonstration immédiate d’un théorème fondamentale d’Euler sur les polyèdres et exceptions dont ce théorème est susceptible », *Mémoires de l’Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg*, t. 4, Saint-Pétersbourg, 1811, p. 271-301.

LISTING, Johann Benedict, Vorstudien zur Topologie, *Göttinger Studien*, *Erste Abteilung : Mathematische und naturwissenschaftliche Abhandlungen* (1847), Göttingen, p. 811-875. (Réédité sous la forme d'un petit ouvrage par Vandenhoeck und Ruprecht, *Vorstudien zur Topologie*, 1848).

— « Etudes préliminaires à la topologie, par Johann Benedict Listing », traduit par Claude Léger et Michael Turnheim, in *Introduction à la topologie*, *Analytica* n° 60, Navarin Editeur, La découverte freudienne, 1989, p. 23-83.

— Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern, *Abhandlungen der Mathematischen Classe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, t. 10, (1861-2), 97-180.

MAXWELL, James Clerk, *A Treatise on Electricity and Magnetism* [1873], Unabridged Third Maxwell, Edition, New York: Dover Publications, 2 vol., 1954.

— *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 2 tomes, Oxford : Clarendon Press, 1881.

— *Traité d'électricité et de magnétisme* par James Clerk Maxwell (traduit de l'anglais sur le deuxième édition [1881], par G. Séligmann-Lui avec Notes et Éclaircissements par MM. Cornu, Potier et Sarrau, Tome I. (1885), Tome II. (1887), Paris : Gauthier-Villars.

— *The Scientific letters and papers of James Clerk Maxwell*, Volume II : 1862-1873 (Edited by P. M. Harman), Cambridge : Cambridge University Press, 1995.

— *The Scientific Letters and Papers of James Clerk Maxwell* (Edited by P. M. Harman) Volume III, 1874-1879, Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

MILLER, William H., *A Treatise on Crystallography*, Cambridge, 1839.

MOORE, Matthew E. (Ed.), "The Genesis of the Peircean Continuum", *Transactions of the Charles S. Peirce Society: A Quarterly Journal in American Philosophy*, vol. 43, N° 3 (Summer 2008): 425-469).

— *a*. Essays on Peirce's Mathematical Philosophy. Chicago: Open Court, 2010.

— *b*. Philosophy of Mathematics, Selected Writings Charles S. Peirce. Bloomington: Indiana University Press, 2010.

MÜLLER, Felix, Vocabulaire mathématique ; Français-Allemand et Allemand-Français, contenant les termes techniques employés dans les mathématiques pures et appliquées. Leipzig : B. G. Teubner, 1900. [Paris, Gauthier-Villars, Libraire-éditeur].

MURPHEY, Murray G., *The development of Peirce's Philosophy* (1961); 2nd ed., Indianapolis/Cambridge: Hackett Publishing Company, Inc., 1993.

PANZA, Marco, « Peirce et le continu », *Revue de synthèse*, 1998, vol. 119, n° 4, p. 603-611.

PEIRCE, Charles S., *The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce*, 4 volumes en 5 (Volume 1, Arithmetic, xl + 260 p., Volume 2, Algebra and Geometry, 672 p. ; Volume 3.1, Mathematical Miscellanea, 763 p., Volume 3.2, Mathematical Miscellanea, 390 p. et Volume 4, Mathematical Philosophy, 393 p (Edited by Carolyn Eisele). The Hague: Mouton & Co. B.V. Publishers, 1976.

— “Recent Developments of Existential Graphs and their Consequences for Logic”, *CP* 4.584, 1906.

— “Immortality in the Light of Synechism” [1893], *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings* [*EP*], Edited by the Peirce Edition Project, volume 2 (1893-1913). Indiana University Press, 1998.

— “The Law of Mind”, The Monist: An International Quarterly Journal of General Philosophical Inquiry, 1892.

— *Reasoning and the Logic of Things: The Cambridge conferences lectures of 1898* (Edited by Kenneth Laine Ketner; with an Introduction by Kenneth Laine Ketner & Hilary Putnam). Cambridge, MA: Harvard University Press, 1992.

— *Collected Papers*, (Edited by Charles Hartshorne, Paul Weiss, Arthur W. Burks), *Thoemmes Continuum*; New edition (15 April 1997), 3746 pages.

— *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings* vol. 2, Peirce Edition Project (dir.), Bloomington, Indiana University Press, 1998.

PIETARINEN, Ahti-Veikko, *Signs of Logic: Peircean Themes on the Philosophy of Language, Games, and Communication* (Synthese Library **329**). Dordrecht : Springer, 2006.

PONT, Jean-Claude, a. *La topologie algébrique ; des origines à Poincaré*. Paris : Presses Universitaires de France, 1974.

— *b*. « La petite enfance de la topologie algébrique », *L'enseignement mathématique*, XX, fasc. 1-2 (1974), 111-126.

RIEMANN, Bernhard, *Œuvres mathématiques de Riemann*, traduites par L. Laugel, avec une préface de M. Hermite et un discours de M. Félix Klein. Paris : Gauthier-Villars et fils, 1898.

— *Gesammelte mathematisches Werke und Wissenschaftlicher Nachlass.* Herausgegeben unter Mitwirkung von Richard Dedekind von Heinrich Weber. Leipzig : B. G. Teubner, 1876.

ROSA, António Machuco, *Le concept de continuité chez C. S. Peirce*. Thèse de doctorat de l’É.H.E.S.S (dirigée par le Professeur Jean Petitot, soutenue le 9 Avril 1993, à l’Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris.

TAIT, Peter Guthrie, “On integrals of hydrodynamic equations which correspond to vortex motions”, *Phil. Magazine*, 33 (1867) 485-512.

— “On Knots”, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, *Session* 1876-77, 306-317.

— *Scientific papers of Peter Guthrie Tait*, vol. I, Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1898. N° XXXIX, *On knots* [*Transactions of the Royal Society of Edinburgh*], 1876-7. [Revised *May* 11, 1877].

— “Johann Benedict Listing”, *Nature*, 27 (February 1), 1883, LXV, 81-84.

— “Listing’s *Topologie*. Introductory Address to the Edinburgh mathematical Society” (9 November 1883), *Philosophical Magazine*, (5) 17 (N° 103), Jan. 1884, 30-46 & plate opp. p. 80.

— *Scientific Papers of Peter Guthrie Tait,* vol. II, Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1900. LXVI, p. 85-98 (+ planche)

TURNER, J. C. & GRIEND, P. van de (eds.) *History and Science of Knot*s, World Scientific Pub., K & E *Series on knots and everything*, vol. 11, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1996.

VANDERMONDE, Alexandre-Théophile, « Remarques sur les problèmes de situation » (lu le 4 mai 1771), *Histoire de l’Académie royale des Sciences*, année 1772, seconde partie, 566-574

WALTERSHAUSEN, Wolfgang S. von, *Gauss zum Gedächtnis*. Leipzig : Hirzel, 1856.

WEISS, Paul, “Charles Sanders Peirce”, *Dictionary of American Biography* (Edited by D. Malone), vol. 14, 1934, New York: Scribner, 398-403.

ZEMAN, J. Jay, *The Graphical Logic of C. S. Peirce*. Ph. D. Dissertation, University of Chicago, 1964 [http://www.clas.ufl.edu/users/jzeman/graphicallogic/introduction.htm, 2002 et http://www.clas.ufl.edu/users/ jzeman/graphicallogic/index.htm].

CDC The Century Dictionary and Cyclopedia, vol. I-X. Prepared under the superintendence of William Dwight Whitney, New York: The Century Co, 1889, 1895

CP Peirce, C. S. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vol. I-VI : 1931-1935 (Ed. Charles Hartshorne et Paul Weiss) ; vol. VII-VIII (Ed. Arthur W. Burks). Cambridge, MA: Harvard University Press [Édition électronique sur CR-ROM préparée et présentée par John Deely, Intelex Corporation, Charlottesville, VA, USA, 1994].

DPP Baldwin, J. M. (ed) *Dictionary of Philosophy and Psychology*. vols. 1-2. Gloucester, MA: Smith, 1901-1905 (rééd. 1960).

NEM Peirce, C. S., *The New Elements of Mathematics*, vols. 1-4. C. Eisele (ed). La Haya: Mouton, 1976.

RLT Peirce, C. S., *Reasoning and the Logic of Things*. *The Cambridge Conferences Lectures of 1898*. K. L. Ketner (Ed.). Cambridge, MA: Harvard University Press, 1992.

A HISTORY OF GALOIS FIELDS

Frédéric BRECHENMACHER*
Université d'Artois
Laboratoire de mathématiques de Lens (EA 2462)
&
École polytechnique
Département humanités et sciences sociales
91128 Palaiseau Cedex, France.

ABSTRACT — This paper stresses a specific line of development of the notion of finite field, from Évariste Galois's 1830 "Note sur la théorie des nombres," and Camille Jordan's 1870 Traité des substitutions et des équations algébriques, to Leonard Dickson's 1901 Linear groups with an exposition of the Galois theory.

This line of development highlights the key role played by some specific algebraic procedures. These intrinsically interlaced the indexations provided by Galois's number-theoretic imaginaries with decompositions of the analytic representations of linear substitutions. Moreover, these procedures shed light on a key aspect of Galois's works that had received little attention until now.

The methodology of the present paper is based on investigations of intertextual references for identifying some specific collective dimensions of mathematics. We shall take as a starting point a coherent network of texts that were published mostly in France and in the U.S.A. from 1893 to 1907 (the "Galois fields network," for short). The main shared references in this corpus were some texts published in France over the course of the 19th century, especially by Galois, Hermite, Mathieu, Serret, and Jordan. The issue of the collective dimensions underlying this network is thus especially intriguing. Indeed, the historiography of algebra has often put to the fore some specific approaches developed in Germany, with little attention to works published in France. Moreover, the "German abstract algebra" has been considered to have strongly influenced the development of the American mathematical community. Actually, this influence has precisely been illustrated by the example of Elliakim Hasting Moore's lecture on "abstract Galois fields" at the Chicago congress in 1893. To be sure, this intriguing situation raises some issues of circu-

* Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche : projet CaaFÉ (ANR-10-JCJC 0101)

lations of knowledge from Paris to Chicago. It also calls for reflection on the articulations between the individual and the collective dimensions of mathematics. Such articulations have often been analysed by appealing to categories such as nations, disciplines, or institutions (e.g., the "German algebra," the "Chicago algebraic research school"). Yet, we shall see that these categories fail to characterize an important specific approach to Galois fields.

The coherence of the Galois fields network had underlying it some collective interest for "linear groups in Galois fields." Yet, the latter designation was less pointing to a theory, or a discipline, revolving around a specific object, i.e. Gln(Fpn) (p a prime number), than to some specific procedures. In modern parlance, general linear groups in Galois fields were introduced in this context as the maximal group in which an elementary abelian group (i.e., the multiplicative group of a Galois field) is a normal subgroup.

The Galois fields network was actually rooted on a specific algebraic culture that had developed over the course of the 19th century. We shall see that this shared culture resulted from the circulation of some specific algebraic procedures of decompositions of polynomial representations of substitutions.

Introduction

This paper investigates the history of Galois fields in the 19th century. Yet, many of the texts that one could relate to finite fields from a retrospective point of view will not be in the scope of the present investigation. I will rather analyse a specific line of development in which Galois fields were intrinsically interlaced with some procedures of decompositions of the analytic (i.e., polynomial) representations of linear groups. A key role in this context was played by Jordan's famed 1870 *Traité des substitutions et des équations algébriques* (the *Traité* for short). This treatise provided a specific approach to linear groups in Galois fields that would be taken up in the thesis Leonard Dickson completed in 1896 under the supervision of Eliakim Hastings Moore: *The analytic representation of substitutions on a power of a prime number of letters with a discussion of the linear group*. This approach would be developed a few years later in Dickson's 1901 monograph, *Linear groups with an exposition of the Galois field theory*.

I shall problematize the issues that will be tackled in the present paper in section I below. Yet, before getting into details about these issues, let me first introduce further the mathematics involved by summing up briefly the role played by Galois fields in Jordan's *Traité*[1]. The "Théorie de Galois" alluded to in the very short Livre I is all about higher congruences $f \equiv 0$ (mod. P), for an irreducible polynomial of degree n with integer coefficients. It thus deals with what would nowadays be called finite fields, or Galois fields, in the tradition of the number-theoretical imaginaries which Galois had introduced in his 1830 "Note sur la théorie des nombres" (the *Note*, for short)[2]. Yet, Galois's imaginaries bear only a very indirect relation to the general principles of his famous "Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux" (the *Mémoire*, for short), and therefore also to the correspondence between fields and groups which is today perceived as the very essence of Galois theory[3]. Indeed, for Galois, number-theoretic imaginaries were above all useful in enabling a practice for dealing with

[1] For a description of Jordan's specific relation to Galois's works, and its reception, see [Brechenmacher, 2011]

[2] Independently of the legacy of Galois, finite fields had been developed in the legacy of Gauss by Schönemann, Dedekind, and Kronecker. See [Frei, 2007]. I will not deal in this paper with these lines of developments of finite fields. Even though Dedekind had lectured on Galois's works in Göttingen in the mid-1850s, his perspective remained disconnected from Jordan's approach before the turn of the 20th century.

[3] In 1846, Liouville had insisted on the distinction between Galois's imaginaries and the solvability of equations when he pointed out that the representation afforded by primitive roots did not imply any result on the solvability of higher congruences by radicals.[Galois, 1846, p.401]

the substitutions involved in the investigation of primitive equations of prime power degree[4]. [Galois, 1830b, p.405-407] [Galois, 1832, p.410] More precisely, one of the first general principles of the *Mémoire* had been to consider as rational "every rational function of a certain number of determined quantities which are supposed to be known a priori - we shall [then] say that we adjoin them to the equation to be solved[5]." [Galois, 1831b, p.418] The *Mémoire*'s first proposition stated that: "Let a given equation have the m roots a, b, c,... There will always be a group of permutations of the letters *a*, *b*, *c*,... [...] such that every function of the roots, invariant under the substitutions of the group, is rationally known." [Galois, 1831b, p.421] The known rational functions can be retrospectively understood as forming a field. But the substitutions were acting on indeterminate letters or on arrangements of letters, not directly on the field. In the case of an equation of prime power degree, the p^n roots could be indexed by number-theoretic imaginaries. These in turn could be substantiated via cyclotomy, thus providing an analytic representation for the substitutions involved[6]. [Galois, 1830b, p.405] In sum, the finite fields underlying such indexations were considered both as additive and multiplicative abelian groups but without direct relation to the fields defined by rational functions of the roots[7].

Only a few references to Galois can be found in Jordan's Livre II on substitutions, and none at all in its opening chapter "On substitutions in general", which may today be described as group theory. The main allusion to Galois occurs in the section on the "Analytic representation of substitutions" (chap. II, § I), precisely in connection with the *Traité*'s first use of number-theoretic imaginaries for the indexing mentioned above. This resumption is crucial as it leads to the "origin of the linear group" (chap. II, § II), i.e. to central objects of Jordan's treatise[8]. Indeed, underlying the indexing of p^n letters

[4] In this paper, the term "substitution group" designates a permutation group on a finite number of letters.
[5] See annex 2 for some examples. This recourse to "known rational functions" was not original with Galois in 1830. Lagrange had developed the notion of "similar" functions as early as 1770 (*Cf.* [Waerden, 1985, p.81]). Two functions f and g of the roots of a given equation are called similar, if all substitutions leaving f invariant also leave g invariant. It then follows that g is a rational function of f and of the coefficients of the initial equation.
[6] See annex 1 for some numerical examples.
[7] Because this paper will especially consider finite fields $GF(p^n)$, which are separable extensions (and even Galois extensions) on F_p, I will not deal with the retrospective linear algebraic standpoint of Artin's Galois theory: most of the texts under consideration were not resorting to the notions of vector space, normality, separability, field extension, or even to a clear separation between groups and finite fields. Moreover, Galois's theory of general equations was related to the formally different values of functions on n variables (or roots of general equations), it can therefore be applied to special equations with no multiple roots. For this reason, the equations considered in this paper will be supposed to have distinct roots.
[8] The groups considered are $GL_m(p^n)$ along with its subgroups $SL_m(p^n)$, $PSL_m(p^n)$, $SP_{2n}(p)$, $PSP_{2n}(p)$, $O_n(p^n)$, etc. Cf. [Dickson, 1901] as well as [Dieudonné, 1962].

was one type of substitution (a cycle) appearing in two analytic forms: (k $k + 1$) and (k gk). The "linear form" (k $ak + b$) originated from the composition of these two forms[9].

As we shall see, some specific procedures of decompositions of the analytic representation of n-ary substitutions would be one of the main specificities of Jordan's presentation of Galois's number-theoretic imaginaries in the long run.

1. Problems, questions and methods

In this section, I shall introduce the problems I am tackling in this paper as well as the methods I am appealing to.

1.1 Algebra and the collective dimensions of mathematics

Dealing with the history of a discipline, a theory, or a theorem immediately raises the issue of the selection of a relevant corpus of texts. Moreover, this issue poses the more general problem of the categories that are used for articulating the individual and the collective dimensions of mathematics.

Let us exemplify this situation with one of the most well-known episode in the history of Galois fields. In a lecture he gave at the 1893 Chicago congress, E.H. Moore has often been considered to have introduced the "abstract notion of Galois field." Yet, most commentaries on Moore's lecture have not only celebrated the creation of a new abstract notion but also the starting point of the "Chicago research school in algebra." Moreover, Moore's lecture has often been considered as exemplifying the influence on the development of the American mathematical community of an abstract approach that was characteristic of "German mathematics". [Parshall, 2004, p.264] But we shall see that in 1893 Moore stated that every finite field is the "abstract form" of a Galois field $GF(p^n)$ with no direct relation to the result that every finite field can be represented as a Galois extension of F_p, and therefore with little relation with the notion of "Körper" as it was developed in Germany. On the contrary, Moore's lecture resulted in the circulation in Chicago of a specific approach developed in France over the course of the 19th century.

The above example highlights how a label, such as the one of "abstract Galois field," implicitly points both to some collective organizations of mathematics and to

[9] Following Galois and Jordan, in this paper the term "linear" substitutions/groups designate both linear and affine substitutions/groups. See [Galois, 1831b, p. 430-432], [Jordan, 1870, p.91].

some collectives of mathematicians. Moreover, this situation also suggests a tension in the evolution of mathematical knowledge, *i.e.* between individual creations, from which abstract notions are supposed to originate, and some collective dimensions, such as local social spaces (research schools) or more global institutional or national frames. Such tensions appear frequently in the historiography of algebra. The global evolutions of algebra from 1830 to 1930 have been analysed as the transformation of a discipline focused on equations to one investigating abstractly defined mathematical entities. Small-scale historical investigations have often focused on the origins of abstract entities as the creations of some individuals (e.g., groups, fields, algebras, rings). Larger-scale diffusions of these abstract notions have been studied through some genealogies of individuals (e.g., Galois, Jordan, Dedekind, Frobenius, Steinitz, Noether, Artin), as well as through some specific national or more local frameworks (e.g., set theoretical methods in Germany, or Hilbert's axiomatic approach in Göttingen). As a result, categories that mix collective organizations of mathematics and collectives of mathematicians have often been used to analyse the historical evolutions of algebra, e.g., the "German abstract algebra," the "Chicago algebraic research school," the "French school of real analysis," etc. To be sure, these categories illuminate some important aspects of the evolutions of mathematical knowledge. Yet, they also raise some difficult issues.

First, both the categories of "nations" and "disciplines" were in the making in the time-period we would like to analyse. "Algebra" "fields" "equations" or "Germany" have had changing meanings in various times and spaces. Until the 1930s, "algebra" was not usually referring to an object-oriented discipline, *i.e.* as identifying both a corpus of specialized knowledge revolving around some specific objects and the institutionalized practices of transmissions of a group of professional specialists (*i.e.* the "algebraists"). [Brechenmacher et Ehrhardt, 2010] In France, for instance, algebra was, on the one hand, traditionally considered in the teaching of mathematics as an "elementary" or "intermediary" discipline encompassed by "the higher point of view" of analysis. On the other hand, algebra was also pointing to some procedures that made a "common link" between researches in the various branches of the mathematical sciences. [Brechenmacher, 2012a] What was explicitly identified as "algebraic" therefore often pointed to some implicit circulations between various theories. Therefore, appealing to the category "algebra" for thus a corpus of texts implicitly sheds a retrospective light on the evolutions we would like to analyse, which may bring both social and conceptual anachronisms, and therefore some inadequate collective dimensions.

Second, both disciplines and nations are actors categories. They were much involved in public discourses on mathematics. Yet, these discourses did not correspond directly to any actual collective dimensions of mathematics. Quite often, they involved some boundary work that reflected the roles taken on by some authorities in embodying some collective models of mathematical lives. [Brechenmacher, 2012b] These boundaries were not only setting delimitations between mathematicians and non mathematicians but were also supporting some hierarchies among the practitioners of mathematics (researchers vs teachers and engineers, analysts vs algebraists, etc.). Disciplines and nations played a key role in setting such boundaries (e.g., "German algebra" vs. "French analysis"). They were intrinsically interlaced with some epistemic values ("abstract" vs "concrete", "pure" vs "applied", "modern" vs "classical" etc.).

For instance, in 1890, Émile Picard's academic obituary of Georges Halphen was structured on the opposition between two different orientations in the mathematical thought ("la pensée mathématique") :

> The ones aim above all at extending the domain of knowledge. Without always caring much about the difficulties they leave behind them, they do not fear to move forward, they always look for new fields of investigations. The others prefer to stay in a domain of already developed notions, which they seek to deepen further; they want to exhaust all consequences and they try to highlight the true grounds of the solution of each question. These two directions in the mathematical thought can be seen in all the branches of this Science [...] the first one can nevertheless be found more often in connection with integral calculus and functions theory, and the second one in connection to modern algebra and analytic geometry. Halphen's works were mostly related to the second orientation; this profound mathematician was above all an algebraist. [Picard, 1890, p.489]

To be sure, it was a mixed blessing to be qualified by Picard as an "algebraist". Again, in his 1922 obituary of Jordan, Picard highlighted the former's "tendency to develop a very general approach to mathematical questions as if he feared that some particularity may impeach him to see the true reasons of things". Thus, Picard concluded, "Jordan has really been a great algebraist; the fundamental notions he introduced in analysis will save his name from oblivion". [Picard, 1922]

At the turn of the 20th century, Picard was far from being isolated in attributing more value to analysis than to algebra *per se*. Recall that, in France, the mathematical sciences were mainly divided between analysis, geometry and applications. Algebra and Arithmetics were therefore included in analysis. At the turn of the century, several authorities such as Jules Tannery, Picard, and Henri Poincaré, contrasted the "richness" of the power of unification of analysis with the "poverty" of considering algebra and/or arithmetic as autonomous disciplines. Picard was one of the main advocate of such an opposition, which often aimed at blaming some approaches developed in Germany.

Yet, the collective dimensions that were put to the fore in such public discourses were rarely coherent with the mathematical works of the authors of the discourses. For instance, Picard celebrated publicly Jordan's presentation of the algebraic dimensions of Galois theory. Yet, in his own mathematical work, Picard was not appealing to Jordan's approach but to the one of the German Leopold Kronecker.

Moreover, these discourses were circulating in various medias and were far from drawing a homogeneous picture. For instance, in 1898 Louis Couturat published a paper in the *Revue de métaphysique et de morale* which opposed both the process of "arithmetization" of mathematics and the one of autonomization of algebra to the unified perspective provided by the "science of order" in the tradition of René Descartes, Louis Poinsot, and Galois. [Couturat, 1898] Yet, in Robert Adhémard's 1922 obituary of Jordan, the science of order was presented in a very similar way as German algebra in other discourses, but with a direct reference to the war with Germany:

> In 1860, Jordan was already devoting himself to the Algebra of order, i.e., an Algebra of ideas which is much higher than the Algebra of computations. He naturally followed Galois's works. [...] Whenever Jordan manipulates a mathematical being, it is with the austere hold of his powerful claw. Wherever [Jordan] passes, the trench is cleared. [Adhémard, 1922]

In the reviews they published in various journals, some actors who did not have prominent positions in key mathematical centres expressed publicly their appreciations of the collective developments of mathematics. These discourses were sometimes in direct opposition with the ones of the academic authorities of mathematics. Their views can be quite refreshing in regard with the themes and heroes the historiography of algebra has often put to the fore. Let us consider two examples. First, in a paper that aimed at expressing the importance of the notion of group, the American Georges A. Miller blamed David Hilbert's "Grundlagen der Geometrie" for avoiding the modern methods in group theory "even where it would simplify the treatment of the subject in hand". [Miller, 1903, p.89] Second, let consider the review the French Léon Autonne wrote on Jean-Armand de Séguier's works on group theory. One would recognize in this review a quite canonical statement about the origin of a conceptual approach to algebra, and its slow diffusion... if only the name of Séguier was replaced by the one of Richard Dedekind:

> M. abbott de Séguier is one of the most eminent among contemporary algebraists. If his works are not as famous as they deserve to be, it is because they deal with such a deep and difficult order of idea - i.e., the most abstract

> and general group theory- that only a very few people, even among mathematicians, are able to follow the author. [Autonne, 1913]

In 1904, de Séguier had published a treatise entitled *Élements de la théorie des groupes abstraits* ("Elements of Abstract group theory"). That such a book was published in Paris at a time-period for which the historiography has often opposed the German abstract algebra to the French analysis highlights the limits of both national and disciplinary categories. Moreover, de Séguier was not an exceptional isolated individual in France. His works were recognized by other mathematicians, not only in France, but also in the U.S.A. Séguier's books on group theory were indeed systematically listed in Miller's reports to the A.M.S. on the recent progresses in group theory, in company with some other Frenchmen's works, such as Edmond Maillet's and Raymond Levavasseur's.

1.2 Networks of texts as a method of investigation

Taking into consideration historical sources such as Séguier's works thus necessitates to go beyond the structurations of the collective dimensions of mathematics that are provided by nations, institutions and disciplines. As has been seen above, the evolutions of categories such as "algebra" during the time-period under consideration especially raise difficulties in the very first step of the historical investigation, which is the selection of a corpus of text.

This situation makes it compulsory to study carefully the ways texts were referring one to another, thereby constituting some networks of texts. Yet, such networks cannot be simply identified as webs of quotations. [Goldstein, 1999] Not only do practices of quotations vary in times and spaces but intertextual relations may also be implicit. My approach to this problem consists in choosing a point of reference from which a first corpus is built by following systematically the explicit traces of intertextual relations. A close reading of the texts involved then gives access to some more implicit forms of intertextual references. [Brechenmacher, 2012c] Among these, I shall especially discuss in this paper the references to the "analytic representation of substitutions". The signification of such a reference may seem quite straightforward at first sight. Which may be the reason why the analytic representation of substitutions has actually remained unnoticed in the historiography. Yet, as shall be seen in this paper this reference designated a specific collective dimension of mathematics that played a key role in the development of Galois fields. Because they provide a *heuristic for the construction of a corpus*, and thus *a discipline for reading texts*, intertextual investigations permit to identify the collective dimensions of mathematics whose are shaped by circulations of knowledge and practices.

To be sure, such networks of texts should nevertheless not be considered as constellations in an empty sky. First, each author usually belonged to several networks, which pointed to various topics, times and spaces. Second, in laying the emphasis on textual interrelations, my investigations therefore do not aim at discussing the main collective dimensions in which the actors were involved. Yet, that a group of text presents and objective intertextual coherence raises issues. What did the texts of such a group share? What was circulating in such a network?

1.3 The Galois fields network

In the framework of a collective research project[10], a database of intertextual references has been worked out for all the texts published on algebra in France from 1870 to 1914[11]. Investigations of intertextual connections have then aimed at decomposing the global corpus into subgroups of texts. One of these subgroups gives rise to a coherent network, which was mostly active during a single ten-year period, from 1893 to 1907, and which involved mainly French and American authors.

This group initially involved actors in Chicago (e.g., Moore, Dickson, Ida May Schottenfels, Joseph H. Wedderburn, William Bussey, Robert Börger) and in Paris (Jordan, Émile Borel and Jules Drach, Le Vavasseur, de Séguier, Potron, Autonne) but quickly extended to actors in Stanford (Miller, William A. Manning, Hans Blichfeldt), and to other individuals such as William. L. Putnam, Edward V. Huntington or Lewis Neikirk.

One of the main mathematical issue that was shared in this collection of texts was the one of "Galois fields" "champs de Galois" or "imaginaires de Galois". For this reason, I shall designate this collection as the *Galois fields network*. Yet, this designation should not be understood as pointing to a specific mathematical theory or discipline. There was no homogeneous way of considering such a theory for all the authors of the network. In this paper, I shall thus pose the identity of the Galois fields network as a problem.

This network is coherent in the sense that its texts refer not only frequently to each other but also to a core of shared references. Let us thus characterize further the Galois fields network by looking at its main shared references.

---

[10] CaaFÉ: *Circulations of algebraic and arithmetic practices and knowledge* (1870-1945) : France, Europe, U.S.A; http://caafe.math.cnrs.fr

[11] The corpus has been selected by using the classification of the Jahrbuch. On Thamous database of intertextual references, see http://thamous.univ-rennes1.fr/presentation.php

These were, on the one hand, some retrospective references to some papers published in France in the 1860s, mostly by Charles Hermite, Joseph-Alfred Serret, Émile Mathieu, and Jordan, as well as to Galois's works in the early 1830s. These references were not exclusive of others, such as those to more recent works of Georg Frobenius, Alfred Loewy, or Felix Klein, whose influence in the U.S.A has been well documented. [Parshall et Rowe, 1994, p.147-455] But none of these played as important a role for the collective identity of the network as the works of the 1860s. Moreover, this core of shared references played a key role in establishing links between texts. For instance, the issues tackled in a paper published by Moore in 1895, and entitled "Concerning Jordan's linear groups" were quickly discussed in France. Another paper, published by the French Le Vavasseur in 1896, "Sur les symboles imaginaires de Galois" immediately raised a controversy with the American Miller in the Academy of Paris.

On the other hand, the main shared references contemporary to the authors of the network were Moore's 1893 paper on Galois fields, Dickson's 1901 monograph on linear groups, and Séguier's 1904 monograph on abstract groups.

The Galois fields network thus revolved around a two-fold periodization: its authors were active from 1893 to 1907 and shared a core of references from the 1860s. We shall see that the two times and spaces involved here point to a shared algebraic culture that can neither be identified to a discipline nor to any simple national or institutional dimension. These two times ans spaces were mainly articulated by two treaties: Serret's 1866 *Cours d'algèbre supérieure* and Jordan's 1870 *Traité*.

1.4 The structure of the present paper

The methodology of the present investigation consists in starting with a micro-historical analysis of a local episode, which was one of the main shared reference in the Galois field corpus, i.e., the works of Moore and Dickson in Chicago from 1893 to 1896. We shall provide a detailed analysis of this episode with a careful attention to the algebraic procedures involved. This small-scale analysis highlights the key role played by some specific procedures that were interlaced to a specific notation: the analytic representation of substitutions.

In the third and fourth sections of this paper, we shall change the scale of analysis in investigating the long run circulation of these procedures in the 19th century, especially in the works of Galois and Jordan.

Finally, in the fifth section of this paper, we get back to Chicago in 1893 for the purpose of identifying the shared algebraic culture lying beneath the Galois fields network, which can be characterized as a specific approach to both linear groups and Galois fields, but with no interest in Galois Theory.

2. Linear groups in Galois fields from 1893 to 1907

Given the time-period during which the Galois fields network developed, it is quite natural to attempt to characterize the collective dimensions of this network as regard to the context of the institutionalization of finite group theory at the turn of the 20th century. Moreover, given the important proportion of American mathematicians involved, one may aim at inscribing the Galois fields network in the context of the development of the American mathematical research community. Yet, we shall see in this section that even though appealing to a discipline such as group theory, or to a nation such as the U.S.A., sheds light on some aspects of the Galois field network, neither the categories of discipline nor of nation succeed in characterizing the specificity of this network.

2.1 The problematic collective dimensions of the Galois fields network

2.1.1 Disciplines: finite groups

The institutionalization of finite group theory is an important collective trend in which the Galois fields network participated. Reports were produced ([Miller, 1898], [Miller, 1902], [Miller, 1907], [Dickson, 1899]), monographs were published ([Burnside, 1897b], [Dickson, 1901], [Séguier, 1904b], [Le Vavasseur, 1904]) and discussions were developed on issues related to the teaching and the history of finite groups.

The network originated between Otto Hölder's abstract formulation of the notion of quotient group [Hölder, 1889] and the emergence of group representation theory. The determination of all groups of a given order was often proclaimed as a general goal. This question had al- ready been presented as the "general problem" of substitutions in the third edition of Serret's Cours. [Serret, 1866, p.283] The texts of the network either pointed to Serret or to the "abstract" formulation Arthur Cayley had given to the "general problem of groups" in the first volume of the American Journal of Mathematics. [Cayley, 1878, p.50] The use of the composition series of the Jordan-Hölder theorem potentially reduced the general problem to the one of the determination of all simple groups. The identification of classes of simple groups therefore raised difficult issues related to the various concrete forms of representations of abstract groups such as substitutions groups or collineation groups. [Silvestri, 1979]

The latter problem was much related to the development of abstract group theory (*i.e.* groups defined by symbolic, and later axiomatic, operations). First, the use of the Jordan-Hölder theorem required the consideration of quotient groups that were not introduced by substitutions but by symbolic laws of operations. [Nicholson, 1993, p.81-85] Second, Hölder's use of Sylow's theorems for determining simple groups of order less than 200, [Hölder, 1892] or groups of orders p^3, pq^2, pqr, p^4, [Hölder, 1893] was based on the identification of abstract groups up to isomorphism[12].

2.1.2 Disciplines: abstract group

Hölder's approach to abstract groups was a shared reference in the Galois fields network. In his paper of 1889, Hölder initially appealed to the abstract approach developed by Walther von Dyck [Dyck, 1882] in the legacy of Cayley. A symbolic approach was nevertheless developed earlier in 1877-1878 by Frobenius, partly in the legacy of Cayley as well. [Hawkins, 2008] After Hölder eventually appealed to Frobenius's approach in 1892, the two mathematicians would publish a series of papers on topics closely related one to the other (Sylow theorem, composition series, solvable groups etc.). But unlike Hölder's, Frobenius's works did not become a shared reference in the Galois fields network until 1901.

The variety of attitudes to Frobenius shows that the category of "abstract finite group theory" is not appropriate for identifying the collective dimensions of the Galois fields network[13]. Moreover, that issues related to abstract groups circulated in the Galois fields network did not imply a shared approach toward abstraction. Unlike Moore, other key authors followed Frobenius's works closely. But, on the one hand, Burnside's 1897 Theory of groups of finite order indicated the longstanding concerns for symbolic laws of combination which had circulated from Cambridge to other academic contexts in Great Britain and the United States. On the other hand, it was on Georg Cantor's set theory that Séguier had grounded his 1904 monograph on abstract groups.

[12] In the mid-1860s, the use of Jordan's "method of reduction" of groups into composition series had raised representation issues.[Jordan, 1867a, p.108] The notion of isomorphism had been appropriated by Jordan from the framework of cristallography and had been presented as a general notion of the theory of substitutions.[Jordan, 1870, p.56] It would play a key role in the connections Klein would develop between various types of groups in the late 1870s and would become "abundant" in the 1890s. [Frobenius, 1895, p.168] First, Hölder's introduction of abstract quotient groups would point to the isomorphism theorems. [Frobenius, 1895] Second, the actual composition of groups from factor-groups could not be undertaken unless all the automorphisms of the groups involved would be known. [Hölder, 1893, p.313] [Hölder, 1895, p.340]

[13] For instance, Moore did not refer to Frobenius in the 1890s even though [Burnside, 1896] pointed out that [Frobenius, 1893] had already made use of the notion of the group of automorphisms of a group that [Moore, 1894] had claimed to introduce. Several authors actually claimed independently to have abstractly identified the group of automorphisms of abelian groups of type (1, 1,..., 1) (*i.e.*, Frobenius, Hölder, Moore, Burnside, Le Vavasseur, and Miller), a problem that pointed to the traditional introduction of the general linear group in the legacies of Galois and Jordan as will be seen in greater details later.

2.1.3 Nations

National categories were no more relevant than theories for identifying the Galois fields network. For instance, the works of the Americans Frank N. Cole and John W. Young were frequently referred to by Frobenius. Reciprocally, Miller appealed to Frobenius's works early on in the mid-1890s. In his first *Report on recent progress in the theory of the groups of finite order*, he put to the fore Frobenius's representation theory when he acknowledged the growing importance of linear groups. [Miller, 1898, p.248] But Dickson nevertheless mentioned Frobenius neither in his 1899 *Report on the recent progress in the theory of linear groups*, nor in his monograph. The situation did not change until 1901, when a review of Alfred Loewy criticized Dickson's restatement of some of Frobenius's results.

2.2 Moore's Galois fields

We have seen that large-scale categories, such as nations and disciplines, fail to characterize the collective dimensions of the Galois fields networks. Let us now change our scale of investigation. In this section, we shall focus on a micro-historical analysis of one the main shared references of the network, *i.e.* Moore's works on Galois fields from 1893 to 1896.

2.2.1 Research schools

In their work of reference on the development of the American mathematical community, Karen Parshall and David Rowe have analysed in detail the institutional background of Moore's paper in the context of the emergence of the "Chicago research school." [Parshall et Rowe, 1994, p.261- 455] They have especially highlighted the strong influence of Félix Klein's Göttingen. But even though the roles played by German universities in the training of many American mathematicians have been well documented, the influence of this institutional framework on mathematics has been assumed quite implicitly. The Chicago research school has indeed been characterized by its "abstract and structural" approach to algebra, which was called a "characteristic of trendsetting German mathematics." [Parshall, 2004, p.264] Here two difficulties arise.

First, the role attributed to "abstract algebra" reflects the tacit assumption that the communication of some local knowledge should require direct contact. Because the historiography of algebra has usually emphasized the abstract and structural approaches developed in Germany, and especially in the center of Göttingen, other, more local, abstract approaches, such as in Cambridge or Chicago, have raised issues about the imperfect communication of some tacit knowledge, as exemplified by the late interbreeding in the 1930s of the German *Moderne Algebra* and the Anglo-American approach to associative algebras. [Fenster et Schwermer, 2005] In this frame- work, algebraic developments in France, such as Séguier's, have been either ignored or considered as some isolated attempts modelled on German or Anglo-American approaches. [Dubreil, 1982]

Second, as has already been highlighted in the previous section of this paper, both disciplines and nations are actors categories which were much involved in public discourses. Recall that Moore's 1893 paper was read at the congress that followed the World Columbian exposition in Chicago. [Parshall et Rowe, 1994, p. 296-330] The world fair was dedicated to the discovery of America and was the occasion of much display of national grandeur.[Brian et al., 1893] In parallel to the elevation of the first great wheel, presented by the Americans as a challenge to the Eiffel Tower, or to the Viking ship that sailed from Norway as a counterpoint to the replica of Columbus's three caravels, the architectural influence of the French École des Beaux arts was challenged by the German folk village. The latter especially included an exhibit of the German universities with a section on mathematics at Göttingen.

In regard with mathematics, Klein had been commissioned by the Prussian government to the fair. He had contributed "a brief sketch of the growth of mathematics in the German universities in the course of the present century" to the book *Die deutschen Universitäten*, which had been edited for the exhibit of the German universities. [Lexis, 1893] Moreover, during the fair, Klein delivered a series of lectures which aimed at "pass[ing] in review some of the principal phases of the most recent development of mathematical thought in Germany."[Klein, 1894] Klein was also the glorious guest of the congress while Moore was both the host of the congress and one of its main organizers.

2.2.2 Paying tribute to Klein...

As we shall in this section, Moore's lecture – the concluding lecture of the Chicago congress – was clearly aimed at both paying tribute to Klein's *Icosahedron* and to some recent works developed in the U.S.A.

On the one hand, Moore generalized to a "new doubly infinite system of simple groups" (*i.e.* $PSl_2(p^n)$), what was then designated as the three "Galois groups" (*i.e.* $PSl_2(p)$, p = 5,7,11) involved in the modular equations that had been especially investigated by Klein, following Galois, Hermite, and Kronecker among others. [Goldstein, 2011] The generalization consisted in having the analytic form of unimodular binary linear fractional substitutions (*i.e.* $PSl_2(p)$), with $ad - bc \equiv 1 \; mod.p$

$$k' = \frac{ak + b}{ck + d}$$

operate on p^n letters indexed by Galois number theoretic imaginaries, instead of the usual case prime number p of letters $F_p = Z/pZ$.

On the other hand, the issues Moore tackled were those associated with the continuation of the lists of simple groups that had been established by the American Cole up to the order 500, [Cole, 1892][14] following Hölder's list up to order 200. [Hölder, 1892] For the purpose of continuing the list up to 600, Cole had put to the fore a simple group of order 504 (*i.e.* $PSl_2(2^3)$). Moore showed that Cole's group – as well as a simple group of order 360 he had introduced in 1892 – belonged to his "new doubly infinite" system of simple groups.

The extension of the system of indices from p elements to p^n elements was based on the introduction of the notion of a "field" as a "system of symbols" defined by "abstract operational identities" of addition and multiplication:

> Suppose that the s marks may be combined by the four fundamental operations of algebra [...]. Such a system of s marks we call a field of order s. The most familiar instance of such a field [...] is the system of p incongruous classes (modulo p) of rational integral numbers.
>
> Galois discovered an important generalization of the preceding field [...] the system of p^n incongruous classes (modulo p, $F_n(x)$)[15]. [Moore, 1893]

2.2.3 [...] but colliding to the implicit collective dimension lying beneath the use of Galois imaginaries

At first sight, the mathematical issues tackled by Moore in 1893 may seem very coherent with the institutional influence of Germany on the development of the American mathematical community.

Yet, the nature of the relevant collective dimensions changes if one shifts the scale of analysis from institutions to texts. Even though he aimed at celebrating the emergence of some abstract researches in the U.S.A. in the framework of the Göttingen tradition, Moore actually collided to the implicit collective dimension that was underlying the use of analytic representations of substitutions, such as $\frac{ak+b}{ck+d}$, on Galois number theoretic imaginaries.

This situation is illustrated by the fact that, in the context of the development of the Chicago research school, Moore's Galois fields would be collectively described as ha-

[14] Except for the orders 360 and 432 which Frobenius dealt with in 1893.

[15] In modern parlance, this sentence is identifying a Galois field as the finite field of incongruous classes of polynomials F modulo p and modulo a given irreducible integral polynomial F_n of degree n.

ving given an "abstract" or "general" form to some previous works by Serret, Jordan, and Mathieu:

> The linear groups investigated by Galois, Jordan and Serret were defined for the field of integers taken modulo *p*; the general Galois field entered only incidentally in their investigation. The linear fractional group on a general Galois Field was partially investigated by Mathieu, and exhaustively by Moore [...]. [Dickson, 1901, p.1]

Moreover, a similar abstract formulation was not only often attributed to Borel and Drach's 1895 textbook but Moore's results on $PSl_2(p^n)$ were also traced back to Jordan's 1870 treatise:

> The expression Galois Field is perhaps not yet in general use. The notion is due To Galois and is fully developed by Serret. [1866] The theory in its abstract form is developed by Moore [1893 and 1896], and by Borel et Drach [1895]. Jordan [1870] and Moore [1898], have shown that the quaternary linear homogeneous substitution group of order 8!/2 in the Galois Field, and the alternating group of degree eight, both of which are simple, are holoedrically isomorphic. [Schottenfels, 1899]

2.3 What's new in Moore's paper?

Let us now address the issue of the nature of Moore's individual contribution. What was actually new in the 1893 congress paper?

It is obviously not possible to attribute to Moore the origin of the notion of Galois field as this notion had already been introduced by Galois (as well as by Carl Gauss and Poinsot before Galois, as will be seen later), and developed by several other authors such as Serret, Mathieu, Jordan, etc. One may thus be tempted to attribute to Moore a more "abstract" definition of the notion of Galois field, one that would fit the axiomatic approach developed in Göttingen and thereby herald the postulationist program that would develop at the beginning of the 20th century in Chicago. As a matter of fact, we have seen above that Moore was celebrated by his followers in Chicago for his truly abstract and general presentation of Galois fields. Yet, such an interpretation is contradicted by a closer look at the chronology of Moore's publications.

2.3.1 The shadow of Klein-Fricke's textbook on Moore's incomplete references

A first version of Moore's lecture was published in 1893. There, Moore had noted that: "it should be remarked further that every field of order s is in fact abstractly considered as a Galois field of order *s*". [Moore, 1893, p.75] But he neither provided any proof nor any further details about this remark until the second version he completed in autumn 1895 for the publication of the proceedings of the congress. [Moore, 1896, p.242] Yet, in the meantime, several other mathematicians provided an abstract definition of Galois field: Burnside dealt in 1894 with exactly the same issue of the simplicity of $PSL_2(p^n)$ and Drach gave in 1895 an abstract definition to "Galois imaginaries". [Borel et Drach, 1895, p.343-349] Moreover, Heinrich Weber and Hilbert claimed in 1893-1895 to lay new ground on Galois's theory of equations by appealing to Dedekind's concept of "Körper"[16]. [Weber, 1893] [Weber, 1896] [Hilbert, 1894]

The focus of the first version of Moore's paper was on the proof of the simplicity of $PSl_2(p^n)$ on the model of the case of $PSl_2(p)$ treated in [Klein et Fricke, 1890, p. 419-450]. Alongside with [Hölder, 1889], the textbook of Klein and Fricke was actually the main bibliographic reference of Moore's paper. Not only had Cole authored the references to the simple groups investigated by Jordan[17], [Moore, 1893, p.74] but most other references had been taken from the Klein-Fricke textbook[18]. It is likely that Moore had not read [Gierster, 1881] closely, and had not read [Serret, 1859] and [Serret, 1865] at all. Moore even suggested that both mathematicians dealt only with the case n = 1, while in fact they used Galois imaginaries in some parts of their works. [Moore, 1893, p.76]

Moreover, even though the relevant works of [Mathieu, 1860, p.38], and [Mathieu, 1861b, p.261] on linear fractional substitutions and number-theoretic imaginaries were identified precisely by [Gierster, 1881, p.330], Moore did not mention Mathieu until 1895 when he would add a last-minute note to the revised version of his paper.[Moore, 1896, p.242] Mathieu had nevertheless investigated various aspects of $PSL_2(p^n)$, and had already introduced Cole's group of order 504 (with no concern about the issue of simplicity)[19].

2.3.2 Every Galois field is a Galois field

Had Moore built his 1893 lecture on the four pages Klein and Fricke had devoted to Galois imaginaries? Actually, his use of the expression Galois theory indicates that Moore had certainly read Jordan's *Livre I*. Moreover, the formulation he gave of Galois fields pointed to the extensive development of Serret's 1866 *Cours*. Indeed, both [Klein et Fricke, 1890] and [Jordan, 1870] were faithful to Galois's original presentation in focusing on the fact that $GF(p^n)$ is isomorphic to $F_p(j)$, with j a root of $x^{p^n-1} \equiv 0$. In con-

[16] See [Kiernan, 1971, p.137-141] and [Corry, 1996, p.34-45].
[17] In a modern notation, Moore's paper referred to Jordan's investigations of $Alt(n)$, $PSl(n, p)$, and $P\Omega^{\varepsilon}(n, p)$.
[18] Moore had indeed reproduced the references made to [Serret, 1866] and[Jordan, 1870] by[Klein et Fricke, 1890, p. 419] as well as the references to [Serret, 1859], [Serret, 1865] and [Gierster, 1881] in [Klein et Fricke, 1890, p. 411].
[19] In 1861, Mathieu had used the threefold transitive group $PSl_2(p^n)$ for introducing a five fold transitive group on 12 letters. He had also announced the existence of a five fold transitive group on 24 letters, which he would eventually introduce in 1873 (*i.e.* the Mathieu groups M_{12} and M_{24}).

trast, Serret had developed an arithmetic approach to $GF(p^n)$ as $F_p(X)/(f(x))$. Galois's (or Jordan's or Klein's and Fricke's) presentation was the one that was actually helpful for the group-theoretical purpose of Moore's paper. But Moore turned Galois upside down.

On the one hand, what he designated as a Galois field was actually Augustin Cauchy's approach to higher congruences, [Boucard, 2011b] as developed later by Serret's concrete function field representation, and which Moore nevertheless attributed to Galois.

On the other hand, Moore's notion of abstract field was close to Galois's initial presentation. The statement that a finite field can be abstractly considered as a Galois field actually echoed the connection between two perspectives on number theoretic imaginaries, as it had already been displayed in textbooks such as Serret's in 1866. [Serret, 1866, p.179-181] It was quite close to stating that every Galois field (in the sense of Galois) is the abstract form of a Galois field (in the sense of Cauchy or Serret):

> The Galois field $GF[q^n]$ is uniquely defined for every q=prime, n=positive integer; that is: $F_n(X)$ – which are irreducible (mod. q) – do exist.
>
> The $GF[q^n]$ is independent of the particular irreducible $F_n(X)$ used in its construction. For the details of this Galois theory, see Galois: *Sur la théorie des nombres* (*Bulletin des Sciences mathématiques de M. Férussac*, vol. 13, p. 428, 1830; reprinted, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, vol. 11, pp. 398-407, 1846); *Serret, Algèbre supérieure*, fifth edition, vol. 2, p. 122-189; and Jordan: *Substitutions*, p. 14-18. [Moore, 1893]

In Moore's approach, the relation of abstract fields to number-theoretic imaginaries was analogous to the relation between classes of abstract simple groups and the representation of a given simple group. On the one hand, because irreducible polynomials mod p "do exist," as Moore claimed, Serret's approach provided a construction of a field of p^n elements, [Moore, 1893, p.75] *i.e.* "an existence proof" of the abstract field. [Moore, 1896, p.212] On the other hand, the notion of abstract field was a normal interpretation of Galois's 1830 *Note* in the context of the considerations on the symbolic laws of complex numbers and associative algebras that had been developed since the 1870s[20]. Klein-Fricke had indeed considered Galois imaginaries as complex numbers $aj^{n-1} + bj^{n-2} + \cdots + 1$. Commutative systems of hypercomplex numbers were typically investigated by the consideration of the minimal polynomial of the system. In the case of finite fields, the minimal polynomial was of the form $x^{p^{n-1}} - 1 \equiv 0$ as Moore would prove in 1896.

---

[20] In the tradition of investigations on associative algebras, [Borel et Drach, 1895, p.343-350] and[Moore, 1895] both provided tables of compositions of number-theoretic imaginaries. On the history of associative algebras, see [Hawkins, 1972, p.244-256] and [Parshall, 1985, p. 226-261].

In short, Moore had stated that finite abstract fields can be represented as function fields. In contrast, this statement had no relation with Galois fields in the sense of field extensions and Galois groups[21]. In the framework of Weber's presentation of Dedekind's Galois theory, Moore's "Galois fields" were both "endlicher Körper" and "Congruenz Körper" but they were not "Galois'sche Körper."

2.3.3 Lost in a fog of old French works

Recall that the introduction of abstract Galois fields was not the initial aim of the 1893 lecture. But as a result, Moore nevertheless established a direct relation between [Serret, 1866] and [Klein et Fricke, 1890]. In doing so, he had jumped over more than twenty years of development of mathematics. Yet, unlike Burnside who mastered the relevant references to the works of Serret, Jordan, and Mathieu, Moore seems to have been lost in a fog of old French works.

But even more dramatically, Moore's system of simple groups had actually already been introduced by Mathieu in 1861. What Mathieu had done exactly on Galois fields was especially problematic to Moore. The 1893 version of the congress lecture was supposed to be followed by a more complete publication in *Mathematische Annalen*. But this did not happen and Moore published instead a paper on triple systems. When Moore referred to Mathieu for the first time, he promised he would devote a subsequent paper to point[ing] out the exact point of contact [of his works] with Mathieu's results. [Moore, 1895, p.38] But no such paper was ever published and Moore eventually settled for the addition of a short allusive note to the revised edition of the congress paper.

As a result, before the publication of the proceedings of the congress in 1896, Moore and his student Dickson struggled to access the tacit collective dimension of some texts published in France in the 1860s, especially by appealing to Jordan's 1870 *Traité*. As will be seen in greater details later, the main problem of Dickson's thesis was actually to specify the relations between the works of Jordan and Mathieu on linear groups in Galois fields[22].

Moore's 1893 paper thus eventually resulted in the circulation of some works that were foreign to Klein's legacy as is illustrated by the publication from 1893 to 1896 of a train of papers on "Jordan's linear groups in Galois fields". Not only was Dickson's doctoral thesis devoted to the investigation of the collective dimensions Moore's Galois

[21] As any finite field of p^n elements can be represented as the splitting field of $P(X) = X^{p^n} - X$ on F_p, every finite field can be represented as a Galois field. But such a splitting field was not considered as a Galois extension on F_p: Moore had no concern for the interplay between groups and fields which is characteristic of Galois theory

[22] One of the main results of Dickson's thesis was to generalize Moore's doubly-infinite system of simple groups to the triply-infinite system $Sl_m(p^n)/Z$ with Z the center of $Sl_m(p^n)$ and (m, n, p) different from (2, 1, 2) or (2, 1, 3).

fields had accidentally bumped into in 1893. But, more generally, many of the early works of the Chicago research school were systematic generalizations of some statements of Jordan's *Traité*.

In sum, Moore's works on Galois field from 1893 to 1896 can be analysed as a process of appropriation of a specific collective framework associated to the use of analytic representations of substitutions on Galois imaginaries. This situation highlights the difficult problem of identifying the scales at which various forms of collective dimensions play a relevant role in the evolutions of mathematics, especially in respect to the articulation of the collective dimensions of texts with the ones of actors, such as disciplines or nations.

3. Galois number-theoretical imaginaries in the long run

Let us now investigate the collective dimension Moore accidently collided to in 1893. We shall thus change once again our scale of analysis by looking more closely into some texts that have been published in the long-term. This section is thus based on a retrospective approach of the 19th century from the standpoint of the Galois fields network at the turn of the 20th century.

3.1 On the variety of the forms of representations of substitutions in the 19th century

We have seen that Galois fields were intrinsically interlaced in Moore's works with the use of a specific form of representation of substitutions: the analytic representation. We shall thus start our present investigations with an overview of the variety of forms of representations of substitutions that have been used during the 19th century:

- Two-lines representations (a turns into d ; b turns into c etc.):

$$(a,b,c,d,e,...)$$
$$(d,c,a,e,b,...)$$

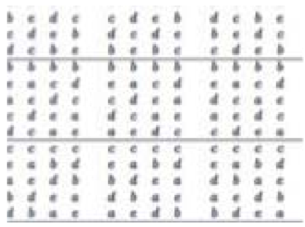
- Products of transpositions :

$$(ad)(de)(eb)(bc)(ca)$$

- Symbolic notations of the operations between substitutions:

$$ghg^{-1} = \mathrm{K}$$

- Tabular representations of groups and subgroups of substitutions:



• Analytic representations, which consist in indexing the letters by a sequence of integers in order to represent the substitutions on these letters by polynomials.

The latter form of representation has remained unnoticed in most historiographical accounts on group theory. Yet, we shall see that the analytic representation has played a key role in both the development of the notions of Galois fields and linear groups.

This situation can be analysed as a part of a large scale phenomenon, *i.e.* the crucial role played by polynomial representations of functions in the long run of the 18th and 19th centuries (with extensions to infinite sums or products). It is well known that such a conception of functions has been challenged in the 19th century, especially in connection to the issues raised by representations by Fourier series from which Cantor's set theory would emerge in the 1870s. Yet, analytical representations continued to play an important role even after the introduction of a more general notion of functions as applications, as is exemplified by Henri Poincaré's efforts in the 1880s to provide an analytical representation of fuchsian functions by infinite sums or products.

Karl Weierstrass's factorization theorem is another example of the lasting influence of analytic representations. The theorem illustrates that such representations are not limited to a form of notation: the cannot be dissociated from some specific algebraic procedures modelled on the factorization of polynomial expressions. As a matter of fact, Weierstrass's theorem states that any analytical function – *i.e.* the sum of a power series – can be expressed as an infinite product which factors contains the zeros of the function considered. The factorization theorem also highlights the limitations of analytic representations. It was indeed in attempting to generalize Weierstrass's theorem to infinite products of rational expressions that Gösta Mittag-Leffler was drawned to Cantor's set theory. In the case of functions with singular points, one can provide some global analytical representations only in some specific cases while, in general, one has to consider a function as an application between two sets of points. As Cantor wrote to Mittag-Leffler in 1882: "In your approach, as well as in the path that Weierstrass is following in his lecture, you cannot access to any general concept because you are dependent of analytical representations". (cited in [Turner, 2012])

3.2 The analytic representation of substitutions

Given a substitution S operating on p letters a_k (p prime), the problem of the analytic representation is to find an analytic function f such that $S(a_k) = a_{f}(k)$. As shall be seen in greater details later, an influential approach to this problem (especially for Dickson's 1896 thesis) was the one of Hermite. In 1863, Hermite provided a complete characterization of the analytic representations of substitutions for the cases $p = 5$ and $p = 7$. For instance, any substitution on 5 letters can be represented by combinations of the following polynomial forms:

$$k\ ;\ k^2\ ;\ k^3 + ak$$

Hermite also stated a general criterion for substitutions to have an analytic form. His approach was based on the use of Joseph-Louis Lagrange's interpolation formula. Given two functions φ and ψ of degree p associated to two substitutions S and T on p letters, the substitution ST is then associated with the function $\varphi\psi$. Now, in order to keep the degree of $\varphi\psi$ equal to p, it is necessary to consider both the indices of the p letters and the coefficients of φ and ψ modulo p. The problem of the analytic representation is thus tightly linked to the one of the indexation of the letters on which the substitutions are acting. In case of substitutions acting on p^n letters, one has to consider Galois's number-theoretic imaginaries.

3.3 The special case of cycles: two indexations, two analytic representations

In the special case when the number of letters is a prime number p, an indexation can be given by representing the p letters as the p^{th} roots of unity, i.e., as the roots of the binomial equation:

$$X^p - 1 = 0$$

As a matter of fact, all the roots of this equation can be expressed by the sequence $(0,1,...,p-1)$ of the powers of a single root, ω (*i.e.* a "primitive root" of the binomial equation):

$$\omega^0, \omega^1, \omega^2, ..., \omega^{p-1}$$

In the above indexation, the root ω^{k} turns into ω^{k+1}, by adding 1 to the exponent k. This operation is associated to the substitution $(k\ k+1)$, which provides the analytic representation of a cycle by the affine function $f(k) = k + 1$ (or, more generally, $f(k) = k + a$).

But let now consider the list of all the roots of unity less the unity itself, that is the roots of the irreducible cyclotomic equation (on $\mathbb{Q}$) deduced from the binomial equation:

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$$

This sequence of $p - 1$ roots can be reindexed in the following way:

$$\omega^g, \omega^{g^2}, \ldots, \omega^{g^{p-1}}$$

by appealing to a primitive root g of the binomial congruence:

$$X^{p-1} - 1 \equiv 0 \; mod(p)$$

Such a reindexation provides an alternative analytic representation of a cycle by the form (k gk), i.e., the linear function $f(k) = gk$.

To sum it up, cycles can be represented analytically in the two following ways:

• an operation of addition (k $k + a$)

• an operation of multiplication (k gk)

This double representation is crucial. It allows to simultaneously decompose the set of roots of unity into subsets and to factorize binomial equations. As shall be seen in the next section, this procedure of decomposition plays a key role in Gauss's famous proof that cyclotomic equations can be solved by radicals.

3.4 Cyclotomy

Unlike Alexandre Théophile Vandermonde (1774) and Lagrange's (1771) approaches to the special cases $x^5 - 1 = 0$ and $x^{11} - 1 = 0$, Gauss's 1801 *Disquitiones arithmeticae* had introduced a general method of successive factorizations for proving the solvability by radicals of (irreducible) cyclotomic equations of degree $p - 1$. The factorizations resorted to organizations of the roots in a specific order by appealing to the two indexings provided by a p^{th} primitive root of unity ω and by a primitive root g mod. p[23]. For any factorization $p - 1 = ef$, let $h = g^e$, and consider the equation of degree e whose roots correspond to the following e "periods" of sums of f terms:

$$\eta_i = \varpi^i + \varpi^{ih} + \cdots + \varpi^{ih^{f-1}} \; (1 \leq i \leq e)$$

Such decompositions of the roots into periods allows factorizing the initial (imprimitive) cyclo- tomic equation into e factors of degree f. A numerical example for $p = 19$ is provided in Annex 1.

A few years later, in 1808, Lagrange gave a new proof of the solvability of cyclotomic equations. The successive auxiliary equations attached to Gauss's periods were

[23] On Gauss's proof of the existence of primitive roots of cyclotomic equations, see [Neumann, 2007].

replaced by the direct consideration of an auxiliary function of the coefficients and of roots of unity, *i.e.* the Lagrangian resolvent

$$\omega + \alpha\omega^{g} + \alpha^{2}\omega^{g^{2}} + \cdots + \alpha^{p-1}\omega^{g^{p-2}}$$

with α a primitive $p-1^{\text{th}}$ root of unity[24].

3.5 Poinsot's groups

In his 1808 review of Lagrange's treatise, Louis Poinsot commented on the two approaches of Gauss and Lagrange. At this occasion, he had designated Gauss's periods as "groups" in a sense Galois would also use later on. Groups in this sense involved both partitions of "permutations of letters" (*i.e.* arrangements of the roots or indexing lists) and decompositions of "systems of substitutions" (the operations from one permutation to another)[25].

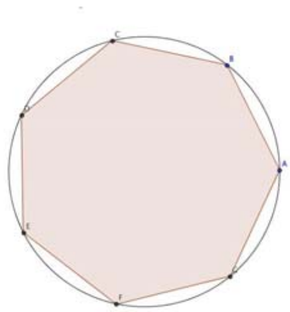
As seen before, Gauss's decomposition resorted to a single kind of substitution (*i.e.* cycles). But two forms of actions had to be distinguished depending on whether the cycles were acting within the groups or between the groups. Poinsot had discussed these two forms of actions from a geometric perspective. The roots generated by a primitive root of unity could be represented "as if they were in a circle" [Boucard, 2011a, p.62] (a numerical example is provided for the case p = 7 in annex 1).

• On the one hand, the operation (*k gk*) decomposes the set of roots into various subset, or blocks, that can be moved one on the other by rotations of the circle. For instance, in the circle below, one can distinguish the blocks (*B*, *C*, *E*) et (*D*, *F*, *G*): one passes from one block to the other by the multiplication of a primitive root *g mod. p* that turns *B, C, E* into *D, F, G*.

• On the other hand, the roots can be made to move forward by translations, i.e., by the operation (*k xk*1) on their indices, which for instance turns *B* into *C*, *C* into *E*, *E* into *B* etc.

[24] The Lagrangian resolvent line of development of Galois theory has been well documented. See [Kiernan, 1971, p.103-110].

[25] The ambivalence of the terminology "group" as regard to the distinction between the "permutations of the roots" and the "substitutions" has often been considered as a limitation of Galois's approach (e.g. [Dahan Dalmedico, 1980, p.282], [Radloff, 2002]). But it should be pointed out that this ambivalence was the very nature of "groups" as they originated from the decomposition of imprimitive groups by the consideration of blocks of imprimitivity of letters.



Gauss's procedure of indexation thus established a connection between arithmetics (congru- ences), algebra (factorization of equations), geometry (circular representation), and mechanics (translations and rotations on/of a circle).

In 1815, Cauchy introduced cycles by appealing to a similar circular representation [Cauchy, 1815, p.75-81] even though he did not focus on the analytic representations induced by the two forms of actions of cycles (k $k+1$) and (k gk). Cauchy indeed rather had favoured other modes of representations of substitutions such as products of cycles, [Dahan Dalmedico, 1980, p.286-295] the two lines notation, the symbolic notation, and some tabular representations[26]. On the contrary, the analytic representation of substitutions played a key role role in Galois's approach as shall be seen in the next section.

[Cauchy, 1815]

3.6 Galois's criterion for irreducible equations of prime degree

We have seen that the analytic representation of substitutions is far from being limited to a specific notation. This representation cannot be dissociated from some specific procedures of decompositions. In this section, we shall highlight the role played by these procedures in the concluding theorem of Galois's famed *Mémoire*.

Recall that Galois's *Mémoire* is organized into two parts: the first provides a general presentation while the second is devoted to the application to a special class of equations.

[26] Cauchy also introduced a terminology that has been used throughout the 19th century, that of "arithmetic substitutions" for (k $k+a$) and of "geometric substitutions" (k gk).

• The first part is famous for its proposition V, which presents the problem of the solvability by radicals as resorting to the interplay between successive adjunctions of roots and the successive decompositions of a group caused by the successive adjunctions of roots to the equation[27].

• The second part of the memoir follows proposition V. It is concluded by a criterion of solvability to irreductible equations of a prime degree:

Theorem 1 Galois's criterion

In order that an equation of prime degree be solvable by radicals, it is necessary and sufficient that, if two of its roots are known, the others can be expressed rationally. [Galois, 1831b, p.432]

This theorem provides an extension to the class of solvable equations that were already known before Galois, *i.e.* Gauss's binomial equations (all the roots are the successive powers of one of them) and Niels Henrik Abel's equations (all the roots are rational functions of one of them).

The analytic representation of substitutions plays a key role in both the statement and the proof of Galois's criterion. An alternative statement of the theorem is indeed the following[28]:

> An irreducible equation of prime degree is solvable by radicals if and only if any function invariable by the substitutions
>
> $$x_k\,,\ x_{ak+b}$$
>
> is rationnaly known [Galois, 1832, p.431].

The key argument of the proof is that the smallest non-trivial group in the successive reductions had to be generated by a cycle. Here, Galois explicitly referred to Cauchy even though he did not appeal to the latter's representation of substitutions as products of cycles but to analytic representations. Galois looked for the penultimate group in the successive reductions of the given equation. He showed that if its substitutions are represented by $(x_k, x_{f(k)})$, then

$f(k+c) = f(\mathrm{K}) + C$, *i.e.* these substitutions turn cycles $k + c$ into cycles $f(k) + C$[29].

Thus :

[27] For some systematic comments on the general principles of Galois's *Mémoire*, see [Radloff, 2002] and [Ehrhardt, 2012].
[28] In modern parlance, Galois's theorem states than an irreducible equation of degree p is solvable by radicals if and only if its Galois group is a subgroup of the affine group.
[29] This group is the maximal group in which the cyclic group $(k\ k + a)$ is a normal subgroup.

$$f(k+2c) = f(k) + 2C, \ldots, f(k+mc) = f(k) + mC$$

Let now consider that $c = 1$ and $k = 0$; let $b = f(0)$:

$$f(m) = Am + b$$

Let now a = A, Galois eventually deduced that:

$$f(\mathrm{k}) = ak + b$$

Galois has designated such substitutions as "linear substitutions"[30].

As will be seen in greater detail later, the core argument of Galois's proof would circulatethroughout the 19th century. The introduction of the general linear group in Jordan's *Traité* would especially "originate" from the exact same argument. In modern parlance Galois's theorem and its proofs boil down to showing that the linear group is the maximal group in which an elementary abelian group (the cyclic group F_p^* in the case $n = 1$ or a direct product of cyclic groups in general) is a normal subgroup.

As we shall see in the next section, it was in attempting to generalize this theorem to the analytic forms of roots of equations of degree p^n that Galois introduced the number theoretic imaginaries.

Considérons l'un quelconque des groupes semblables au groupe (G). D'après le théorème II, il devra s'obtenir en opérant partout dans ce groupe une même substitution ; par exemple, en mettant partout dans le groupe (G), à la place de x_k, $x_{f(k)}$, f étant une certaine fonction.

Les substitutions de ces nouveaux groupes devant être les mêmes que celles du groupe (G), on devra avoir

$$f(k+c) = f(k) + \mathrm{C},$$

C étant indépendant de k.

Donc

$$f(k+2c) = f(k) + 2\mathrm{C},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(k+mc) = f(k) + m\mathrm{C}.$$

Si $c = 1$, $k = 0$, on trouvera

$$f(m) = am + b,$$

ou bien

$$f(k) = ak + b,$$

a et b étant des constantes.

[30] In modern parlance, these are affine substitutions.

[Galois, 1846]

3.7 Galois's attempts to generalize his criterion to equations of degree p^n

It is well known that the *Mémoire* has remained unpublished until Joseph Liouville edited a selection of Galois's works in his journal in 1846. Yet, the criterion had already been stated in Galois's very first note on the issue of the solvability by radicals, "Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations," which was published in the *Bulletin de Férussac* in 1830 (the *Analyse* for short).

In this paper, Galois was already looking for a more general statement for equations of compound degree. The note indeed started with the introduction of the distinction between primitive and imprimitive equations: a "non-primitive equation of degree mn is an equation that can be decomposed into m factors of degree n, by appealing to a single equation of degree m." [Galois, 1830a, p.395] These equations were also designated as Gauss's equations. In his "Fragment of second memoir"[31], Galois indeed appealed to "M. Gauss's method of decomposition" for reducing the problem of finding solvable irreducible equations of composite degree to the one of finding solvable primitive equations of degree p^n. [Galois, 1831a, p. 434]

The aim of the second memoir was to generalize Galois's criterion to solvable primitive equations by the general characteristic that their degree had to be a power of a prime. Such a generalization raised the issue of the indexation of systems of p^n letters.

Galois first solved this problem in decomposing the letters into n blocs of p letters. He considered a primitive equation of degree N that turned into Q imprimitive equations by the adjunction of a radical of prime degree. The group of the equation was then partitioned into conjugated imprimitive groups. Let H be one of these imprimitive groups; its letters were decomposed on the model of Gauss's method of indexation into a table of p columns whose rows correspond to systems of imprimitivity:

$$\begin{array}{c} a_0\, a_1\, a_2 \dots\, a_{p-1} \\ b_0\, b_1\, b_2 \dots\, b_{p-1} \\ c_0\, c_1\, c_2 \dots\, c_{p-1} \\ \dots\dots\dots \quad .. \end{array}$$

Galois then argued that $N = p^n$. More importantly, the above allowed the introduction of n series of p indices for the indexing of the letters, and thereby to give an analytic representation to substitutions on p^n letters into n series of p indices:

[31] Recall that even though the second memoir remained unpublished until 1846, its redaction is nevertheless anterior than the final version of the first memoir which two first versions have been lost after having been submitted to the Académie.

> The general form of the letters will be
>
> $$\begin{matrix} {}^{a}k, k, k, \ldots k, \\ 1 \;\; 2 \;\; 3 \ldots \mu \end{matrix}$$
>
> with $\begin{matrix} k, k\, k \ldots k, \\ 1\,2\,3 \ldots \mu \end{matrix}$ some indices that can take the p values 0, 1, 2, 3, ..., $p-1$ [Galois, 1831a, p.426].

Substitutions on p^n letters could then be represented by functions φ, ψ, χ, ...σ of the indices[32]:

> [...] in the group *H*, all the substitutions have the form
>
> $$\begin{bmatrix} {}^{a}k, k, k, \ldots k, & {}^{a}\varphi(k), \psi(k), \chi(k), \ldots \sigma(k), \\ 1 \;\; 2 \;\; 3 \ldots \mu & 1 \qquad 2 \qquad 3 \quad \ldots \quad \mu \end{bmatrix}$$

Galois then investigated further the case of primitive equations of degree p^2. A cycle, or a “circular substitution” as he said following Cauchy, would have the following form:

$$\begin{bmatrix} {}^{a}k, k\prime, & {}^{a}k+\alpha, k'+\alpha\prime, \\ 1 \quad 2 & 11 \qquad 22 \end{bmatrix}$$

But then, Galois argued, because the substitutions of the group have to transform cycles into cycles, they must have a “linear form” : [Galois, 1831a, p.439]

$$\begin{bmatrix} {}^{a}k, k\prime, & {}^{a}mk+n, mk'+n, \\ 1 \quad 2 & 11 \qquad 22 \end{bmatrix}$$

Galois then successively computed the number of linear substitutions on p^2 letters and looked for solvable “divisors” (*i.e.* subgroups) of the group by investigating substitutions of the following form:

$$\frac{ak+b}{ck+d} \qquad (ad-bc \neq 0)$$

In the *Analyse*, Galois had already made it clear that the groups of orders p or $p+1$ formed by the above substitutions were related to the modular equations of elliptic functions. We shall get back to this issue later.

3.8 Galois’s number theoretic imaginaries

The problem of the analytic representation of substitutions on p^n letters is also related to the introduction of number theoretic imaginaries in a note Galois published in

[32] In modern parlance, the indices form a finite field of p^n elements, which is introduced as a vector space of dimention n over the field Z/pZ

1830 in the *Bulletin de Férussac*[33]. The aim of the Note was actually to show that any system of p^n indices could be reindexed "in analogy with" the indexing of p letters 0, 1, 2,..., $p - 1$ by the roots 1, g, g^2, ..., g^{p-1} of Gauss's congruence $x^p \equiv x(mod.p)$, *i.e.* by the iterated powers of a primitive root j of $x^{p^n} \equiv x(mod.p)$[34]. We have seen before that in the case of a prime number p, such reindexations allow to pass from one form of representation of cycles, $(k\ k + 1)$, to the other $(k\ gk)$, and thus play a key role in Galois's criterion. As a matter of fact, Galois presented his note on number theoretic imaginaries as a "lemma" for the investigation of primitive substitutions on p^n letters. [Galois, 1832, p. 410]

Let

$$f(x) \equiv 0\ mod(p)$$

be an irreducible higher congruence of degree n. As was common at the time, Galois legitimized the introduction of imaginary roots j by appealing to the analogy carried on by the process (of factorization) used for the case of ordinary equations[35]. He expressed the rational functions of the roots as "general expressions"

$$a^{j^{n-1}} + b^{j^{n-2}} + \cdots + 1$$

(with a, b, ... $mod.\ p$) and first proved that these p^n "algebraic quantities" could be considered as the roots of

$$x^{p^n} \equiv x\ mod(p)$$

Reciprocally, he argued that the roots of the latter equation "all depend on one congruence of degree n". [Galois, 1830b, p.399-402]

The conclusion of the *Note* was devoted to the characterization of solvable primitive equations of degree p^n [Galois, 1830b, p.405]. The roots x_k of such an equation could now be indexed by the solutions of the congruence

$$k^{p^n} \equiv k(mod.p)$$

Galois then claimed that if any function of the roots invariable by the substitutions of the form

$$(k\ (ak + b)^{p^r})$$

[33] Before Galois, higher congruences had been considered in the "missing section eight" of Gauss's *Disquitiones Arithmeticae*, [Frei, 2007] as well as by Poinsot [Boucard, 2011a].

[34] In modern parlance, a Galois field $GF(p^n)$ is both an additive group, which can be represented as an n-dimensional vector space on F_p, and a multiplicative cyclic group of p^{n-1} elements.

[35] On these issues, see [Durand-Richard, 1996], [Durand-Richard, 2008].

has a rational value, then the equation is solvable, and reciprocally. The proof was presented as a direct consequence of the decomposition of linear substitutions into a product of the two forms of cycles, *i.e.* in the form $a'(k + b')^{p^{r'}}$: "those who are accustomed to the theory of equations will have no trouble seeing this". [Galois, 1830b, p.406]

As has been seen above, the proof Galois alluded to in the *Note* was given in the *Mémoire* for the case $n = 1$ by appealing to the decomposition of the analytic representation of substitutions. This statement was generalized in 1832 to the substitutions of primitive solvable equations of degree p^n, which Galois claimed, have the linear form : [Galois, 1832, p.410]

$$x_{k,l,m,\ldots},\ x_{ak+bl+cm+\ldots+h,\ a'k+b'k+c'm+\ldots+h',\ a''k+\ldots},$$

Yet, Jordan would contradict this claim in the 1860s in proving that Galois's statement is a necessary condition but not a sufficient one: in the case of p^n letters, it is compulsary to decompose further the analytic representation of linear substitutions.

En donnant aux constantes a, b, r toutes les valeurs dont elles sont susceptibles, on obtiendra en tout $p^\nu(p^\nu - 1)\nu$ manières de permuter les racines entre elles par des substitutions de la forme $[x_k,\ x_{(ak+b)^{p^r}}]$,

[Galois, 1830b, p.406]

On remarque que, dans ces circonstances, l'équation $fx = 0$ sera soluble par radicaux, et, pour parvenir à cette conséquence, il suffit d'observer que la valeur substituée à k, dans chaque indice, peut se mettre sous les trois formes

$$(ak+b)^{p^r} = [a(k+b')]^{p^r} = a'k^{p^r} + b'' = a'(k+b')^{p^r}.$$

Les personnes habituées à la théorie des équations le verront sans peine.

[Galois, 1830b, p.406]

3.9 Generalities and applications

As said before, the introduction of Galois's *Mémoire* had laid the emphasis on a distinction between the "general principles" of a theory and its three "applications" to special classes of equations. [Galois, 1831b, p.417] These applications were discussed in more details in the famous letter Galois wrote to Auguste Chevalier in 1832. During the 20th century, most commentators have focused on Galois's general principles. In this section, I would like to highlight the crucial role played by the three analytic representations involved in Galois's applications:

• The linear form in one variable

$$(k \quad ak + b)$$

associated to the criterion for solvable equations of prime degree

• The general linear form in n variables

$$(k, l, m\ldots ; ak + bl + cm+.., a'k + b'l + c'm +\ldots, a''k + b''l + c''m +\ldots)$$

associated to the investigation of solvable equations of composite degree

• binary fractional linear substitutions

$$\frac{ak + b}{ck + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

associated to the modular equations of the transformations of elliptic functions.

The three applications were intrinsically interlaced with one another in the evolution of Galois's investigations. They were not limited to applications but played also the role of special model cases for the general principles of the *Mémoire*. Each application modelled a special form of decomposition of a group.

First, as Galois would make it clear in his letter to Chevalier, the "simplest decompositions are the ones of M. Gauss" by which the investigation of solvable transitive equations of composite degree was reduced to the one of solvable primitive equations of prime power degree. But, wondered Galois, "what are the decompositions that can be practiced on an equation that Gauss's method would not simplify?" [Galois, 1832, p.409] As has been seen above, the decomposition of primitive equations of p^n or p degrees was modelled on the decomposition of linear substitutions into the two forms of representation of cycles. Recall that there was no clear concept of factor group yet. In the reduction of $(ak + b)$ into two cyclic substitutions, the two analytic forms $(k \; k + 1)$ and $(k \; gk)$ provided a model for the operations involved in composition series. It was on this model that Galois stated that the substitutions of primitive solvable equations of degree p^n had to have the linear form

$$x_{k,l,m,\ldots}, x_{ak+bl+cm+\cdots+h,a'k+b'l+c'm+\cdots+h',a"k+\cdots}.$$

The "proper decomposition" had been modelled on the traditional use of auxiliary equations $x^p = a$ in issues of solvability by radicals (and therefore of the binomial equation $x^n-1 = 0$). This situation may be illustrated by propositions II and III of the *Mémoire*. The first described the proper decomposition of a group relative to the adjunction of a root to an equation. The second stated that if "one adjoins to an equation all the roots of an auxiliary equation, the groups of theorem II would have the additional property of possessing the same substitutions". [Galois, 1846, p.423-425] But this proposition had been previously stated differently. Its original formulation was that if one considers all the $p - th$ roots of unity to have been adjoined to an equation, then the same decomposition of the original group would originate from the adjunction of any of the root of $x^p = a$. In that case, the adjunction of a root would imply the adjunction of all roots, *i.e.* the situation to which the proposition III had been generalized afterward.

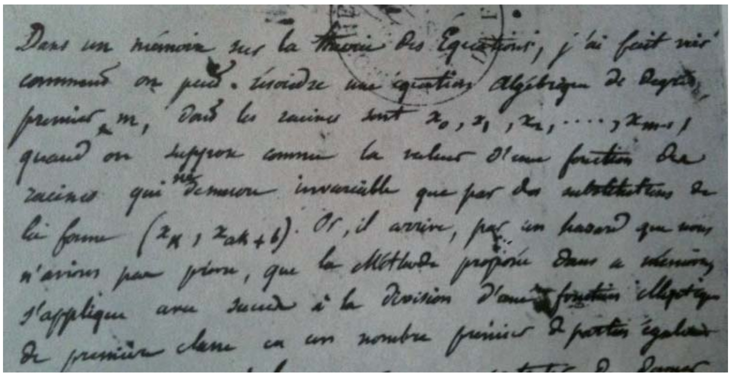
Moreover, the issue of the reduction of the degree of the modular equations gave an example of improper decomposition, *i.e.* of non-normal subgroups of a group. [Galois, 1832, p.408] According to Galois, the difference between improper and proper decompositions was the difference between adjoining one root or all the roots of an auxiliary equation to an equation. Galois's auxiliary equations could involve non-solvable equations on the model of the reduced modular equations. In 1832 Galois indeed claimed he had not focused all his attention on solvability by radicals but had also investigated "all possible transformation on an equation, whether it is solvable by radicals or not". [Galois, 1832, p.408]

The general quartic, and quintic had also played the role of model cases for Galois's investigations. [Galois, 1846, p.428, 433] But it must be pointed out that all the "applications" were pointing to the legacy of Gauss, while general equations were related to the legacy of Lagrange. The two legacies of Gauss and Lagrange did not play the same role in the *Mémoire*. In short, and on the one hand, three forms of decompositions had been modelled on Gauss's equations. On the other hand, Lagrange's legacy was related to the consideration of the number of values of rational functions of the roots under the action of substitutions, a problem that would become one of the main lines of development of the theory of substitutions. We shall get back in more details to this issue in discussing Jordan's 1860 thesis.

In a word, we have seen that Galois's general principles of decompositions of groups had been modelled on the decomposition of the three analytic forms of representations associated to Galois's three applications. Moreover, this model-role played by the polynomial decomposition was not limited to the investigations on equations. A same analytic representation can indeed be used for expressing various objects in different branches of mathematics, such as analysis, algebra, or arithmetics. Such representations, and their associated operatory procedures can thus support some analogies between various issues. In the first page of his "Mémoire sur les fonctions elliptiques", Galois appealed to the permanence of a same analytic form for transferring his works on equations to investigations on complex functions:

> In a memoir on the theory of equations I have shown how one can solve an algebraic equation of prime degree m whose roots are x_0, x_1, x_2, ..., x_{m-1},

when one suppose known that the value of a function of the roots that remains invariable by substitutions of the form (x_k, x_{ak+b}). But it happens, by a chance I did not expect, that the Method I proposed in my memoir can be successfully applied to the division of an elliptic function of the first class into a prime number of equal parts. [Galois, 1962]


Dans un mémoire sur la théorie des Equations, j'ai fait voir comment on peut résoudre une équation algébrique de degré premier m, dont les racines sont $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$, quand on suppose connue la valeur d'une fonction des racines qui ne demeure invariable que par des substitutions de la forme (x_k, x_{ak+b}). Or, il arrive, par un hasard que nous n'avions pas prévu, que la Méthode proposée dans ce mémoire s'applique avec succès à la division d'une fonction elliptique de première classe en un nombre premier de parties égales

3.10 The analytic representation of substitutions and the various forms of receptions of Galois's works

This section aims at providing a brief overview of the different lines of developments of Galois's works in the 19th century.

The analytic representation of substitutions had circulated with both Galois's applications and general principles. Even at the turn of the 20th century, in a textbook such as Weber's *Lehrbuch der Algebra* – which as often been celebrated for the novelty of its presentation –, the two analytic forms of cycles still played a key role in the conclusion of the presentation of Galois theory. [Weber, 1896, p.637]

Yet, apart from Enrico Betti's and Jordan's systematic comments on Galois's works, the three applications were not usually presented together in the framework of a comprehensive theory. The three analytic representations associated to these applications thus provide some indications on the different lines of development in which Galois's applications were involved.

Actually, in contrast with works such as Cauchy's 1844-46 papers on substitutions, [Cauchy, 1844] [Cauchy, 1845] the focus on the decomposition of analytic representations was specific to the works which referred to Galois. Let us illustrate this situation by alluding briefly to the works of Betti and Hermite[36].

---

[36] Unlike Galois's decompositions, Cauchy composed the "conjugated system" of substitutions by the two forms of cycles (*i.e.* the linear group) but for the sole purpose of computing its order and with no interest in the analytic form of the resulting substitutions.

In 1852, Betti had begun his commentary on Galois with representing substitutions $(x_k x_{\varphi(k)})$ by a bijective function φ (with the indices k either integer mod. p. or Galois imaginaries). As has been seen before, finding all the possible expressions of such functions was later identified as the problem of the analytic representation of substitutions. Betti had nevertheless not given any specific expression to φ until he had discussed Galois's notion of decomposition of a group. Following Galois in 1830 and preceding Jordan in 1860, Betti had then raised the issue of determining the "maximal multiplier of a group," *i.e.* the last step of a decomposition. [Betti, 1852, p.45] For the case of a prime number of letters, this group was generated by cycles of form $(x_k x_{k+1})$ or $(x_k x_{gk})$, while the composition of both forms generated the linear form $(x_k x_{ak+b})$. As in Galois's criterion, Betti's analytic representations were thus interlaced with some specific procedures of decomposition of linear substitutions.

Hermite's first public reference to Galois in 1851 occurred in a paper that succeeded Puiseux's 1850 "Recherches sur les fonctions algébriques". In both the framework of Cauchy's complex analysis and of Hermite's 1844 investigations of the division equation of abelian functions, Puiseux had considered algebraic functions $f(z,w) = 0$ on the complex plane[37]. He had shown that in the neighbourhood of any point z_0 which is not a branch point, the roots $w_1, w_2, ..., w_n$ can be expended as convergent power series in $z-z_0$. If one makes z move on a closed circuit avoiding the branch points, the roots are permuted by a system of substitutions (*i.e.* the monodromy group of the equation), which Puiseux had investigated by appealing to Cauchy's representation of cycles. [Puiseux, 1850, p.384] In 1851, Hermite responded to Puiseux by representing analytically the substitutions involved for stating a criterion of the solvability for equations with parameters, analogous to Galois's criterion. Hermite indeed stated that for equations of a prime degree, "the necessary and sufficient condition for the solvability by radicals is that all the functions of the roots invariant for the substitutions of the following special form

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u_k} \\ \boldsymbol{u_{ak+b}} \end{pmatrix}$$

are rationally known". [Hermite, 1851, p.461] On the model of the proof of Galois's criterion, Hermite's proof was based on the decomposition of the above form into products of

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u_k} \\ \boldsymbol{u_{k+1}} \end{pmatrix}$$

[37] The polynomial $f(z,w)$ in w is irreducible in the field of rational functions of z.

and

$$\begin{pmatrix} u_k \\ u_{gk} \end{pmatrix}$$

Let us now caracterize the various lines of developments of Galois's three applications

3.10.1 The form (k ak + b)

THÉORÈME I. — *Si une équation irréductible $f(x) = 0$, d'un degré premier n, est résoluble par radicaux, ses n racines pourront être représentées par x_z* [l'indice z, pris suivant le module n, devant être réduit à l'un des nombres $0, 1, 2, \dots, (n-1)$], *de telle manière que le système conjugué actuellement propre à l'équation ne renferme que des substitutions linéaires et entières, c'est-à-dire des substitutions de la forme* $\begin{pmatrix} az+b \\ z \end{pmatrix}$, *a et b étant des constantes.*

Serret's *Cours d'algèbre supérieure*, 1866

Lehrsatz XII. Die allgemeinen auflösbaren Gleichungen vom Primzahlgrade p sind die Galois'schen Gleichungen. Ihre Gruppe hat die Ordnung $p(p-1)$; sie wird aus den Substitutionen der Form

$$s = | z \quad az + \alpha |; \quad (a = 1, 2, \dots p-1;\ \alpha = 0, 1, \dots p-1) \quad (\text{mod.}\, p)$$

Netto's 1882 textbook on substitutions

References to Galois's criterion have been one of the principal form of references to Galois's works until the end of the 19th century. This situation is directly the consequence of Liouville's presentation of Galois's achievements in 1846. As a matter of fact, references to the criterion eventually diseappeared when Liouville's *Avertissement* was replaced by Picard's introduction to the 1897 reprinting of Galois's works.

In the *Avertissement* to the 1846 edition of Galois's works, Liouville had claimed that Galois had laid the grounds for a "general" theory of the solvability of equations by radicals. It is well known that he did not comment further on the content of such a general theory. But Liouville had nevertheless celebrated "Galois's method" through its "particular" use for the proof of the criterion. Following Liouville, the presentation of the criterion as a particular application of a general theory of equations dominated public discourse on Galois's works until the mid-1890s. Liouville's presentation of

Galois was in fact reproduced word for word in publications targeting larger audiences than specialized mathematical journals, e.g., the 1848 biography of Galois in the *Magasin encyclopédique* or the many notices that would be published in several encyclopedic dictionaries.

But the citation of Liouville citing Galois could also be found in Serret's *Cours d'algèbre supérieure*. Despite the fact that the first edition of 1849 had made almost no use of Galois's works, its introduction presented Galois's criterion as the endpoint of a longue durée history of the "theory of equations" involving Cardano, Lagrange, Ruffini, and Abel among others. [Serret, 1849, p.1-4] In 1854, Serret's second edition included two additional notes relative to the criterion. The first consisted of a translation of [Kronecker, 1853] involving a discussion on Galois's theorem with regard to Abel's approach. The second was a new proof of the criterion by Hermite.

Serret would include a presentation of Galois's general theory of equations in the third edition of his Cours in 1866. The criterion would then be presented as the conclusion of the theory. Apart from Jordan's *Traité* and Klein's *Icosahedron*, the solvable prime degree "Galois equations" – or "metacyclic equations" – would conclude most presentations of Galois theory until the turn of the century, e.g. [Netto, 1882, p.278], [Bolza, 1891], [Borel et [Drach, 1895, p.334], [Vogt, 1895, p.188],[Weber, 1896, p. 597,648], [Picard, 1896, p.481], [Pierpont, 1900].

3.10.2 The form $\left(k\,\frac{ak+b}{ck+d}\right)$

> lorsqu'on fait la substitution $\begin{pmatrix} \nu_k \\ \nu_{k+1} \end{pmatrix}$; et si l'on vérifie encore qu'il en est de même à l'égard de celle-ci $\begin{pmatrix} \nu_k \\ \nu_{-\frac{1}{k}} \end{pmatrix}$, on arrivera à cette conclusion qu'ils demeurent invariables pour toutes les substitutions où l'on met, au lieu de k, $\frac{ak+b}{ck+d}$, $ad-bc$ étant résidu de n. En effet, cette expression, dans toute sa généralité, s'obtient en composant entre elles celles que nous venons de considérer. Le théorème du § XIV suffit donc pour nous

[Hermite, 1859]

Unlike textbooks, papers published in specialized journals rarely referred to the criterion. When Hermite first referred to Galois publicly in 1851, he already expressed his interest in the cases in which the degrees of the modular equations could be reduced, a problem Betti would investigate in 1853. In 1858-1859, Hermite would appeal to Galois's works again at the occasion of the series of papers in which he would use the modular equation to provide an analytic expression of the roots of the general quintic through elliptic functions.[38] The reduction of the degree of modular equations, as Hermite said, "depends on a deeper investigation of the substitutions": [Hermite, 1859, p.58]

$$\frac{ak+b}{ck+d}.$$

Following Hermite, Serret and Mathieu considered linear fractional substitutions with number-theoretic imaginaries as variables in 1859.

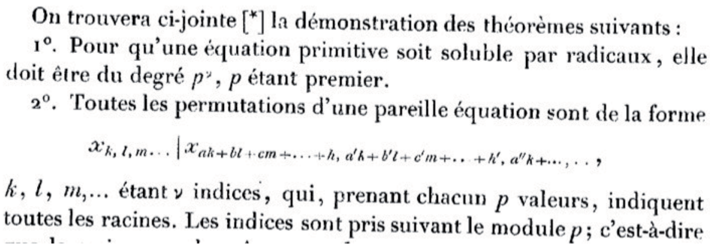
From this point on, Galois's third application was usually referred to in connection to the works of "Galois-Betti-Hermite." This became one of the main types of reference to Galois in the second half of the century, both in periodical specialized publications and in treatises such as [Jordan, 1870], [Briot et Bouquet, 1875], [Klein, 1884] and [Klein et Fricke, 1890]. At the turn of the 1870s-1880s, the expression "Galois groups" was used by Klein and his followers for designating the groups associated to the three modular equations. Later on, at the Chicago congress of 1893, Joseph Perott still designated the group of order 660 of the modular equation of order 11 as the Galois group, while, as has been seen above, Moore aimed at generalizing the Galois groups by introducing abstract Galois fields.

This situation highlights that the reception of Galois's works has never been limited to the strictly algebraic framework of the theories of equations or substitutions. On the contrary, most early interpretations of Galois's works were connected to issues in complex analysis (monodromy) and number theory (arithmetical properties of elliptic functions). In this context, Galois's works have been especially connected to the investigation of the types of "irrational" quantities defined by classes of algebraic equations, which are non solvable by radicals. Recall that Abel's proof of the impossibility to solve the general quintic by radicals had not been considered by most authors as the conclusion of a long history, one that should give rise to the new algebraic perspectives of Galois theory. On the contrary, several mathematicians generalized the traditional problem of the expression of the roots of the general equations of degree 2, 3, or 4 to the one of finding the simplest functions that express the roots of higher degree equations. The works of Betti, Hermite, Kronecker, and Francesco Brioschi on the general quintic are representative on this situation, as well as Klein's later approach on the icosahedron. Moreover, even Jordan's *Traité*, which as often been celebrated as the starting point of an autonomous theory of groups, actually presented Galois's general

[38] See [Goldstein, 2011].

principles in a section entitled "On the irrationals" which developed applications to arithmetics, analysis, and geometry[39].

3.10.3 The general linear form in n variables


On trouvera ci-jointe [*] la démonstration des théorèmes suivants :

1°. Pour qu'une équation primitive soit soluble par radicaux, elle doit être du degré p^ν, p étant premier.

2°. Toutes les permutations d'une pareille équation sont de la forme

$$x_{k,\,l,\,m\dots} \,\big|\, x_{ak+bl+cm+\dots+h,\ a'k+b'l+c'm+\dots+h',\ a''k+\dots,\ \dots},$$

k, l, m,... étant ν indices, qui, prenant chacun p valeurs, indiquent toutes les racines. Les indices sont pris suivant le module p ; c'est-à-dire

Galois's letter to Auguste Chevalier

Galois's treatment of primitive equation of degree p^n had had few echoes until the mid-1860s. In 1852, Betti had followed Galois in extending his investigations to groups of prime power order and therefore to *n*-ary linear substitutions. In 1856, Alexandre Allégret had published two notes with the aim of generalizing Galois's criterion to equations of composite degree. Referring to the works of Kronecker, Betti, and Pierre-Laurent Wantzel, he had considered the "group of linear substitutions defined by Galois" in connection to congruences and cyclotomic equations. The interest Allégret had for groups was nevertheless not shared by most of the authors who dealt with substitutions at the time.

In the first note related to Galois that Jordan addressed to the *Comptes rendus* in 1864, the latter reactivated the issue of the determination of solvable equations of prime power degree. His aim was to lay the emphasis on his "method" whose "essence" was to "reduce" a group into a "chain" of subgroups. Jordan indeed argued that the problem had to be reduced further than Galois's two-step decomposition of solvable transitive equations, to primitive equations with linear substitutions. One thus had to devote specific attention to linear substitutions. In the following years, Jordan repeatedly pointed out the incorrectness of Galois's generalization of his criterion to p^n variables [Galois, 1830b, p.406], *i.e.* that the condition of linearity was sufficient for characterizing solvable primitive groups:

> Galois claimed that that there is a single type of primitive equations that are solvable by radicals [...]. The statements [I made] above show that one has to make an assertion almost opposite to [Galois's] claim. [Jordan, 1868, p.113].

[39] On this aspect of Jordan's treatise, see [Brechenmacher, 2011].

Most of the second section of Jordan's 1870 *Traité* dealt with the problem of characterization and classification of subgroups of $GL_n(p)$, while most of the huge final fourth section investigated the roles played by general linear groups in the chain reduction of solvable transitive groups.

Yet, the n-variable generality of Jordan's approach on linear groups was not taken on by most later presentations of the theory of substitutions. [Netto, 1882], [Klein, 1884], [Klein et Fricke, 1890], [Bolza, 1891], [Borel et Drach, 1895], [Weber, 1896], [Picard, 1896], [Pierpont, 1900] focused rather on the binary linear and fractional linear substitutions associated with solvable equations of prime degree and with modular equations.

For the purpose of understanding how this approach eventually reappeared in connection to Moore's congress paper in 1893, we shall now look in greater details into Jordan's works in the 1860s.

4. Jordan's general linear group

The focus on general analytic representations in n variables is a strong specificity of Jordan's works. As has been seen above, most of his contemporaries focused on linear forms in one variable $(k\ ak + b)$ or linear fractional substitutions $(k\ \frac{ak+b}{ck+d})$. Yet, Jordan had introduced the general linear group before he had started studying Galois's works[40]. As we shall see in this section, Jordan had indeed inscribed his 1860 thesis in the legacy of Poinsot's "theory of order."

4.1 The origin of the linear group

One of the two theses Jordan had defended in 1860 was devoted to the problem of the number of values of functions. This problem is one of the roots of the theory of substitutions. It developed from some works in the 18th century that connected the solvability by radicals of an algebraic equation of degree n to the number of values that can be obtained by a resolvent function of n variables (see annex 2 for a few examples). Recall that in the 19th century, substitutions were usually not studied autonomously but rather through the investigation of functions of n variables, such as Lagrange's "fonctions semblables" that are invariant for a substitutions group. These functions not only

[40] As a matter of fact, Jordan acknowledged in a footnote of his thesis in 1860 that he had "discovered recently in the works of Galois the statement of the theorem" that he had concluded his thesis with, *i.e.*, the order of $Gl_n(p)$.

played a key role in Galois's general principles but also in a variety of other works such as Hermite's theory of quadratic forms or Poincaré's theory of fuchsian functions.

Given a function $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ of n "letters," a "value" of φ was a function obtained by permuting the variables, i.e., for any $\sigma \in Sym(n)$, $\varphi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)})$ was a value of φ[41]. In general, φ can take up to $n!$ distinct values. Yet, it may happen that some of these values are identical. Jordan's thesis aimed at identifying the number of values associated to some classes of substitutions groups.

In 1860, the problem of the number of values of functions had been chosen as the topic of the Grand prix des sciences de mathématiques de l'Académie des sciences de Paris. Two young mathematicians devoted their first research work to this problem: Jordan and Mathieu. Both appealed to Cauchy's approach to substitution theory, which had especially highlighted the notion of "conjugate systems," *i.e.* the equivalent of a substitution group.

The main result of Jordan's thesis was the introduction of a type of "conjugate systems" of n-ary linear substitutions (*i.e.* $Gl_n(p)$) by a "method of reduction" of a "permutation group." Jordan's notion of "permutation group" amounted to the simultaneous consideration of blocks of imprimitivity and substitutions groups. Unlike Galois, though, Jordan appealed to a precise distinction between permutation groups and conjugate systems of substitutions. In the introduction of his thesis, Jordan had explicitly attributed the notion of group to Poinsot. When the number of values of a function was less than $n!$, he had considered that a "symmetry occurred within the function" as an application of "what Poinsot has distinguished from the rest of mathematics as the theory of order". [Jordan, 1860, p.3] According to Jordan, other examples of applications of this theory were Cauchy's determinants, Abel's works on the general quintic, as well as Galois's works on "the conditions of algebraic solvability, the whole theory of equations considered in its full generality, and the classification of algebraic irrationals". When he first referred to Galois, Jordan thus aimed at stressing the generality

[41] This problem is tantamount to finding the possible orders for subgroups of the symmetric group. If φ takes only one value, then it is symmetric and can therefore be expressed as a rational function of the elementary symmetric functions. If $x_1,..., x_n$ are the roots of an equation with coefficients on a given "rational domain", this means that φ can be expressed as a rational function on the rational domain. To intermediary cases between 1 and $n!$, normal subgroups of the symmetric group can potentially be associated to φ by considering the set of substitutions leaving φ invariant. If φ takes, for instance, ρ distinct values $\varphi_1,\varphi_2,..., \varphi_\rho$, these values can be considered as the roots of an equation of degree ρ whose coefficients are the symmetric functions of the initial variables. See also annex 2.

of the theory of order as opposed to "most geometers who have considered this question [of the many valued functions] in the aim of applying it to the theory of equations"[42].

Some previous works, such as Cauchy's (1815, 1844-1846), Joseph Bertrand's (1845) or Serret's (1849), had aimed at stating some boundaries for the number of values of certain general types of functions[43] while others, such as Hermite's and Kronecker's had focused on some special functions, such as a function of six variables that take exactly six values. Jordan emphasized the specific of his own work in regard with the ones of his predecessors in claiming to have developed a "general approach" to the problem through its "successive reductions" to "sub-problems." One may recognize in this claim the traditional definition of the "analysis" in mathematics. Yet, Jordan's reductions were not limited to a general heuristic for solving problems. His reductions consisted in decomposing simultaneously the sets of letters into blocks and the substitutions groups into subgroups. Jordan's reductions were thus intrinsically interlaced with some specific algebraic procedures of decomposition of analytic representations.

Jordan's thesis was organized on a two-step reduction of the general problem of the number of values of functions. First, a general transitive system of substitutions was reduced to a substitutions group T of p^n letters (*i.e.* a primitive quotient group). The issue at stake was to index the letters by n sequences of p integers (1, 2, ..., p) in order to represent the substitutions analytically. The letters were thus reorganized into the "imprimitive system," represented below as a succession of lines (that we shall denote as $\Gamma_1, \Gamma_2,...,\Gamma_m$), and on which the substitutions operated by permuting either the letters in a same line or the lines themselves :

$$\begin{array}{c} a_1\, a_2 \ldots a_p \\ b_1\, b_2 \ldots b_p \\ c_1\, c_2 \ldots c_p \\ . \quad . \ \ldots \ . \end{array}$$

Second, the substitutions of T were decomposed into "primitive" systems, *i.e.* into the case in which it is not possible any more to decompose the system of letters into several lines $\Gamma_1, \Gamma_2,...,\Gamma_m$ as above. Jordan's key argument here was to show that the substitutions operating on imprimitive systems of letters can be decomposed into two

[42] Similar claims about the generality of a broad framework related to both symmetry and groups could be found in the contemporary writings of Théodore Despeyrous, [Despeyrous, 1861, p.417] another follower of Poinsot. Unlike Jordan, Despeyrous nevertheless never attributed any role to Galois as regards permutation groups.

[43] For instance, at the beginning of the century, Ruffini and Cauchy had stated that the number of values that a non-symmetric rational function of 5 variables attains cannot be lesser than 5 unless it is 2.

"species" of substitutions, which correspond to the two analytic representations of cycles.

> • On the one hand, inside each block of imprimitivity Γ_i, the letters were cyclically substituted by first species of substitutions ($x\ x+a$) on the indices. In the general case of letters indexed by n indices $a_{x,x',x'',\dots}$ these substitutions take the form:
>
> $$ax+\alpha \ mod.p,\ x'+\alpha' \ mod.p,\ x''+\alpha'' \ mod.p,\ \dots$$
>
> • On the other hand, the second specie (x,gx) of substitutions substituted cyclically the blocks $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ themselves by operating on the indices by the multiplication of a primitive root g mod. p. In the general case of n indices, these substitutions thus take the form
>
> $$ax+bx'+cx''\dots mod.p,\ a'x+b'x'+c'x''\dots mod.p,\ a''x+b''x'+c''x''\dots mod.p.$$

Thus, in exactly the same sense that powers of a primitive root composed each block Γ, the sequence $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ of the blocks could itself be considered as the cycle (or the orbit) of powers of Γ_1. Each specie of substitution corresponded to one of the two forms of representation of cycles. Their products generated linear forms ($x\ ax+b$) with $x \in F_{p^n}$, *i.e.* if $x = (x, x', x'', \dots, x^{(n)})$:

Theorem 2 Jordan's first theorem

> • *The number of letters in primitive systems is the power of a prime number* p^n.
>
> • *The analytic representation of the substitutions on these systems is linear:*
>
> $(x, x', x''\dots;\ ax+bx'+cx''+\dots+d,\ a'x+b'x'+c'x''+\dots+d',\ a''x+b''x'+c''x''+\dots+d'',\dots)$
>
> *which can also be noted by:*
>
> $$\begin{vmatrix} x & ax+bx'+cx''+\dots+d \\ x' & a'x+b'x'+c'x''+\dots+d' \\ x'' & a''x+b''x'+c''x''+\dots+d'' \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} mod(\mathrm{p})$$

Jordan named "linear group" the group "originating" from this procedure of reduction. In modern parlance, Jordan's first theorem and its proofs boil down to showing that the linear group is the maximal group in which an elementary abelian group (the cyclic group F_p^* in the case $n = 1$ or a direct product of cyclic groups in general) is a normal subgroup[44]. In this sense, it generalizes to p^n the proof involved in Galois's criterion for the case $n = 1$[45].

[44] In modern parlance, the "groups of permutations" correspond to a decomposition of the field into blocks of imprimitivity under the action of an imprimitive substitution group which is itself decomposed into a primitive quotient

4.2 Jordan's reduction of analytic representations

We have seen that the main result of Jordan's thesis is a theorem from which the general linear group originates. As a matter of fact, this group was not defined by a list of axioms, as would be natural to mathematicians nowadays. On the contrary, the general linear group originated from a chain of successive reductions of a general problem into sub-problems. Moreover, we have seen that linear substitutions were above all identified by their analytic representations. The reindexation of the letters based on the two different analytic representation of cycles played a key role in the procedure of reduction of linear groups, which was explicitly presented as modelled on Poinsot's reformulation of Gauss's decomposition (see the numerical examples in annex 1). From the retrospective point of view of Jordan's 1860 thesis, the Gauss-Poinsot method consisted in dividing the letters into groups, each of the same cardinal p^n, while systems of substitutions T were simultaneously partitioned into a "combination of displacements between the groups" [*i.e.* blocks] "and of permutations of the letters within each of the groups" [*i.e.* blocks]. [Jordan, 1860, p.5]

Jordan commented the reindexation underlying his reduction in analogy with the reduction of a helicoidal motion into motions of translation and rotation. This implicitly referred to Poinsot. Moreover, he eventually appealed to the legacies of Gauss and Abel to claim that what could be designated as the unscrewing of the method of reduction of groups was the "very essence" of his approach:

> One could see an image of this result in the theorem of mechanics that reduces the general motion of a solid body to a motion of translation combined with a rotation around the center of gravity [...]. This principle of classification of letters in various groups is the same as the one Gauss and Abel showed the fertility in the theory of equations: to my opinion, this principle is the very essence of the question, it lays the ground for all my analysis. [Jordan, 1860, p.5]

The question of how Jordan accessed Poinsot's works is open. But the echoes between Galois's decomposition and Jordan's early works might have been the consequence of a perspective on Gauss and Lagrange that Poinsot, Galois, and Jordan had

---

group. Let G be a transitive group operating on a set V. A subset V_1 of V is called a block of imprimitivity if $V_1 \neq \varnothing$ and for every $g \in G$, either $V_1g=V_1$ or $V_1g \cap V_i=\varnothing$. If V_1 is such a block and $V_1,V_2, ..., V_m$ are the distinct sets V_1g for $g \in G$, then (V_1, V_2,..., V_m) is a partition of V. G is said to be imprimitive if there is no trivial proper block. G is primitive if it is not imprimitive. See [Neumann, 2006] for a discussion on primitivity in Galois's works. On the roles played by primitivity in Jordan's classification of solvable transitive groups, see [Brechenmacher, 2006, p.195-202].

[45] Later on, Jordan would devote a key chapter of his 1870 *Traité* to the "origin" of the linear group. Yet, this origin would be presented differently than in Jordan's 1860 thesis through a generalization of the proof of Galois's criterion, *i.e.* as a response to the problem of finding the analytic form of the maximal group T in which the group of substitutions ($k, k', \dots, k^{(n)}$; $k + a, k' + a', \dots, k^{(n)} + a^{(n)}$) (i.e., $F_{p^n}{}^*$) is a normal subgroup.

shared. It was indeed in the framework of the reduction of imprimitive groups to primitive groups on the model of Gauss's decomposition that the general linear group had originated from the two forms of representations of cycles in the works of both Galois and Jordan.

Jordan first commented on Galois in the seven-page supplement he added to his thesis in the memoir he sent to the Académie for the Grand Prix of 1860. He immediately focused on Galois's distinction between imprimitive and primitive equations. More importantly, he began to consider later steps of reduction that would thus resort to other forms of decomposition (*i.e.* into normal subgroups). Jordan's deep investigations on the decompositions of the general linear groups into subgroup would culminate in his *Traité* of 1870. The procedures of reductions of the analytic representations of linear substitutions played a key role in these investigations. They actually gave rise to a very general practice of reduction of a problem into a chain of sub-problems that Jordan applied to various issues, such as crystallography, complex analysis, geometry, or differential equations.

4.3 The Jordan canonical form theorem

The statement of the Jordan canonical form theorem between 1868 and 1870 exemplifies the crucial role played by reductions of the analytic representations of substitutions in Jordan's works. This theorem also highlights once again the model-role played by the decomposition of the linear form into the two analytic representations of cycles. In his investigations of the general linear groups, Jordan aimed at reducing any linear substitution on F_{p^n} into an analytic "form as simple as possible". We have seen that in the case of one variable, the substitution (x $ax + b$) can be easily decomposed into two cycles (x gx) et (xx+1). Yet, such a decomposition cannot be directly generalized to the case of n variables. In modern parlance, a matrix of n lines and n columns can only be decomposed to a sequence of operations of the type (x gx) if this matrix can be diagonalized.

Let first consider the special case of linear substitutions on p^2 letters (*i.e.* in 2 variables) that Jordan investigated in details in 1868 (thereby following Galois's second memoir). The determination of the simplest analytical forms was based on the polynomial decomposition of an equation of degree 2 (the characteristic equation of a matrix, in modern parlance). If this equation has two distinct roots, the letters can be reindexed in two blocks in such a way that the substitution is simply acting as a multiplication on each block[46], *i.e.* by multiplying the indices by α and β if the two roots

[46] In modern parlance, one decomposes a vector space of dimension 2 into two subspaces each of dimension 1.

are real, or by $\alpha + \beta i$, $\alpha+\beta i^p$ (with $i^2 \equiv 1 mod(p)$) if the roots are two conjugated imaginary numbers:

$$\begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta u \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & (\alpha + \beta i)z \\ u & (\alpha + \beta i^p)\mathrm{u} \end{vmatrix}$$

Yet, if the characteristic equation has a double root, the substitution cannot be reduced to operations of multiplication as above, unless it is a trivial homothety. In the general case, the canonical form involves a combination of multiplications and additions:

$$\begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta z + \gamma u \end{vmatrix}$$

In Jordan's *Traité*, the canonical form was generalized to n variables in Livre II and was used in Livre IV for reducing *n*-ary linear groups on the model of the groups of order n = p². Later on, Jordan would appeal frequently to reductions of substitutions (in $GF(p^n)$ or $\mathbb{C}$) in his works on groups, differential equations, algebraic forms, etc.

Theorem 3 Jordan's canonical form theorem

This simple form

$$\begin{vmatrix} y_0, z_0, u_0, \dots, y'_0, \dots K_0 y_0, K_0(z_0 + y_0), \dots, K_0\, y'_0 \\ y_1, z_1, u_1, \dots, y'_1, \dots\ K_1 y_1, K_1(z_1 + y_1), \dots, K_1\, y'_1 \\ \dots \qquad\qquad\qquad \dots \\ v_0, \dots \qquad\qquad\qquad K'_0 v_0, \dots \\ \dots \qquad\qquad\qquad \dots \\ \dots \qquad\qquad\qquad \dots \end{vmatrix}$$

to which one can reduce the substitution à A by an adequate choice of indices, will be designated

as its canonical form. [Jordan, 1870, p.127]

4.4 The architecture of Jordan's Traité

Let us now sketch a brief overview of the architecture of Jordan's *Traité*. We shall see that, even though Jordan's first theorem is scattered into pieces in the four sections of the treatise, the practice of reduction that lied beneath this theorem plays a transversal structuring role in the whole *Traité*. This practice actually supports a chain of successive generalizations that runs through the first three sections of the *Traité* until the "fundamental theorem" on the solvability of algebraic equation that opens Livre IV. This theorem then allows reversing this chain of generalizations into a method of successive reductions of general linear groups.

4.4.1 Livre I. On congruences

The *Traité* begins with a presentation of the notions related to congruences that permit the indexation of letters and thus the analytic representation of substitutions. After a general pre- sentation of binomial congruences $X^p - 1 \equiv 0$ *mod.p* in connection to the indexations of systems of p letters, Jordan turned to what he designated as the "Galois theory". This designation does not correspond to the modern Galois theory but to the theory of Galois's number theoretic imaginaries, which allows indexing systems of p^n letters. Jordan's presentation of this theory was modelled closely on the cyclotomy of the indexing of the primitive roots of Gauss's binomal congruence, which he generalized to congruences $X^{p^n} - 1 \equiv 0$ *mod.p*. Livre I thus introduces a special case of analytic representation of substitutions, that of the cycles $(x\ x + a)$ et $(x\ gx)$.

4.4.2 Livre II. Des substitutions

When they return in Livre II, Galois imaginaries play the role of a model case for later gener- alisations of the problem of the analytic representation of substitutions. The generation of the linear group is indeed presented as a generalisation of the special type of substitution underlying the indexing methods of Livre I, *i.e.* $(x\ x + 1)$ or $(x\ gx)$.

Following a first chapter devoted to a general synthesis of previous works on substitutions (such as Cauchy's, Serret's, Bertrand's or Mathieu's), the second chapter on linear groups rep- resents the main part of Livre II. It opens with the problem of the analytic representation of substitutions, which "generates the linear group". There, one may recognize an upside down presentation of Jordan's first theorem: while, in 1860, the linear group originated from successive reductions of a general problem, in 1870 the same group was generated by a direct generalization of Galois's criterion, i.e., from the problem of finding the analytic form of all the substitutions that leave invariant the following analytic form

$$|x, x', \dots, x + \alpha, x' + \alpha', \dots|$$

In modern parlance, the above substitutions correspond to direct products of cycles (i.e., elementary abelian groups). The problem is thus tantamount to finding the analytic form of the substitutions g that turn such products of cycles c into another product of cycles c':

$$gcg^{-1} = c' :$$

g thus have to take the following "linear form":

$$\begin{vmatrix} x & ax + bx' + cx'' + \ldots \\ x' & a'x + b'x' + c'x'' + \ldots \\ x'' & a''x + b''x' + c''x'' + \cdots \\ .. & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

The proof is a direct generalization of the one given by Galois to his criterion. On this occasion, Jordan insisted that, in modern parlance, $GF(p^n)$ could either be represented as $F_p(j)$ with j a root of $x^{p^{n-1}} \equiv 0$, or as a direct product of copies of F_p (*i.e.* as a vector space over F_p). In the first case, $GF(p^n)$ is immediately associated to a multiplicative cyclic group generated by the substitution (x jx).

4.4.3 Livre III. On irrationnalities

The opening chapter of Livre III presents what would be nowadays considered as Galois Theory. However, the association between groups and equations is inscribed in the broader framework of a “General theory of irrationalities”. While the “Algebraic applications” (chap. II) to Galois’s theory of equations represents only a small part of Livre III, the emphasis is on “Geometric applications” (chap, III) and on “Applications to the theory of transcendental functions” (chap. IV). [Brechenmacher, 2011] In the present paper, I shall nevertheless focus on the chapter of “algebraic applications.”

Jordan had first considered the “commutative groups” associated with Abel’s equations, whose roots are rational functions of one of them. Primitive abelian equations actually corresponded to cyclic groups, and Jordan quickly focused on the binomial equations $x^n = 1$ and the associated cyclotomic equation of degree $n = p^\alpha$ (p an odd prime). All the roots can then be expressed by a primitive root $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{p^{\alpha-1}}$. The group of the equation is thus cyclic and generated by (x $x + 1$). But the roots can also be reordered by the use of a primitive root g of the congruence $x^{p^\alpha} \equiv 1 mod. p$, *i.e.* by the following sequence corresponding to (x gx): $\omega, \omega^g, \omega^{g^2}, \ldots, \omega^{g^{p^{\alpha-1}}}$.

Second “Galois equations” are introduced as generalizing Abel’s in three different ways. First, they are irreducible equations of prime degree p all of whose roots can be expressed rationally by two of them, an obvious generalization of the equations considered by Abel. Second, their groups are constituted of substitutions od the form (x $ax + b$), *i.e.* those originating from the cycles of abelian equations. Third, a special case of Galois is given by $x^p\text{-}A = 0$, *i.e.* an obvious generalization of binomial equations.

Galois’s equations could thus be understood as the result of a chain of generalizations based onthe relations between number-theoretic imaginaries, cyclic groups, and linear groups. But from the standpoint of Livre III, the chain could now be considered the other way round. Indeed, the relation between abelian and Galois equations provided an application of the reduction of a group by the "adjunction of irrationals to the [associated] equation". Given a Galois equation, let φ_1 be a function of the roots invariant by (x $x+b$). Recall that such substitutions form a normal subgroup of the group (x $ax+b$) (origin of the linear group). Let then φ_1 be adjoined to the Galois equation: the group of the equation is then reduced to a cyclic group and the equation itself into an abelian equation; as for the group of the equation in φ_1, it is composed of substitutions (x ax) and is then a commutative group too. The initial Galois equation has eventually been reduced to two abelian equations and its linear groups to two commutative simple groups.

4.4.4 Livre IV. On solutions by radicals

But the general theory of Livre III was itself a special model case for the next step of generalisation. Livre IV opens with two theorems, the first stating that abelian equations of prime degree are solvable by radicals, the second, that "an equation is solvable by radicals if and only if its solution can be reduced to the one of a sequence of abelian equations of prime degrees". [Jordan, 1870, p.386] The reduction of Galois equations into abelian equations had thus incidentally proved Galois's criterion. But Jordan did not state the criterion explicitly. The special case of the reduction of linear groups to commutative groups did not aim at imitating Galois's criterion, but instead at the following theorem, which concerned any chain of normal subgroups with quotient groups that are abelian and that Jordan designated as "the criterion of solvability":

Theorem 4 Jordan's fundamental theorem

> A group L is solvable if and only if it is possible to form a sequence of groups 1, F, G, H,..., L, such that, 1° each of these groups is included in the previous one and permutable to its the substitutions of L; 2°any two of its substitutions are exchangeable one with another, up to the substitutions of the previous group. [Jordan, 1870, p.395]

Jordan claimed his theorem laid the ground for a method by which one would "rise progressively to the knowledge of [solvable] groups," *i.e.* the problem to which all the rest of the treatise would be devoted. By the use of this method, "each new step toward the solution will make the field of research narrower"[47]. [Jordan, 1870, p.396]

Let us now come to some conclusions about the structure of the *Traité*. Recall that Jordan introduced the linear group as a generalisation of the special case of the cyclic substitutions associated with number-theoretic imaginaries. Later on, when the notion of

---

[47] Jordan distinguished between three types of problems: A. The reduction from maximal solvable transitive groups to maximal solvable primitive groups and thereby to B. Maximal solvable groups in $Gl_n(p)$, which included the particular cases of C. Maximal solvable groups in $Sp_{2n}(p)$ or $O^+(2)$ and $0^-(2)$. See [Dieudonné, 1962].

a group of an equation had been introduced, the origin of the linear group could be considered as a model for the generalisation of cyclotomic equations to Galois equations. Special cases were both models for the general theory and applications of it. Each link in the resulting chain of generalisation was providing a “higher point of view” toward the previous links. In Livre IV, the relation between linear substitutions (x $ax + b$) on the one hand, and the two forms of representations of cycles (x $x + 1$) and (x gx) on the other hand, would eventually provide a model for the fundamental theorem. In a sense, this theorem crystallized the chain of generalisations that structured the *Traité*, and which could thus be reversed in turning special model cases into applications. For instance, Livre II’s origin of the linear group now appeared as a crucial step for the determination of solvable transitive groups. After having reduced the problem from solvable transitive groups to solvable primitive groups, Jordan indeed showed that a minimal normal subgroup A of a solvable primitive group G is commutative and isomorphic to sums of cyclic groups (*i.e.* of type (1, 1,..., 1) in modern parlance). But G is actually acting on A by linear substitutions: it therefore corresponds to the general linear group, originating from A. On thus recognize here a new presentation of the method of reduction underlying Jordan’s first theorem.

The fundamental theorem indeed supported a chain of reductions from the most general groups to the most special ones: transitive, primitive, linear, symplectic groups etc., until the simple cyclic groups. Most of Livre IV was actually devoted to this chain of reduction.

> The essence of my method consists in determining successively the partial groups F, G, H,.... [Jordan, 1864, p.963]

The linear group played a crucial role in this chain of reduction. It was indeed the most general group the substitutions of which had an analytic representation. Moreover, Livre IV made constant use of procedures of decompositions of the analytic form of linear substitutions.

5. A shared algebraic culture

Let us now come back to the issues raised in the second section of this paper as regard to Moore’s works on Galois fields from 1893 to 1896. We have seen that even though he obviously aimed at paying tribute to Klein, Moore had collided in 1893 with the tacit collective dimensions of a constellation of papers published in France in the 19th century. We have seen also that Moore and his student Dickson had struggled to access these collective dimensions, especially by appealing toJordan's 1870 *Traité*. Yet, we are now able to develop a finer analysis of the situation than the one that is suggested by national frames. Indeed, we have seen that Galois's number theoretic imaginaries had followed different lines of developments in France and abroad, in connection with different uses of the analytic representation of substitutions. Let us recapitulate the various forms of interactions between number-theoretic imaginaries and substitutions we have analysed in this paper.

5.1 Number-theoretic imaginaries and substitutions

At the turn of the 1850s-1860s, Galois's imaginaries were used as a way to extend analytic forms of substitutions from p to p^n variables. Most texts actually dealt with binary linear fractional substitutions ([Hermite, 1859], [Serret, 1859], [Serret, 1865], [Serret, 1866]], [Mathieu, 1860], [Mathieu, 1861b], [Mathieu, 1861a]). Jordan nevertheless investigated general linear substitutions on n variables.

On the one hand, authors such as Hermite had focused on the special substitutions attached to special equations, such as the one-variable linear representation ($k\ ak+b$) associated to Galois's criterion, and more importantly the linear fractional representation ($k\frac{ak+b}{ck+d}$) attached to modular equations. Hermite eventually generalized his investigations on modular equations in 1863 in stating a necessary and sufficient condition for an analytic function to represent a substitution on p^n letters. This approach laid the groundwork for most later presentations of the problem of the analytic representation until the turn of the century[48]. (e.g. [Serret, 1866, p.383], [Jordan, 1870, p.88], [Netto,1882, p.140], [Borel et Drach,1895,p.306], [Dickson,1901,p.59]) Yet, it is clear that Hermite's main interest remained focused on special equations. Recall that his 1863 paper had systematically stated all the reduced forms of analytic expressions of substitutions on 5, and 7 letters, a problem that Hermite had explored in 1858-1859 in connection to his investigations of the modular equations of order 5 and 7. Later on, most treatises presented the problem of the analytic representation of substitutions just before they introduced linear substitutions (*i.e.* the form generated by the two forms of cycles). Moreover, this presentation usually played the role of an intermediary between substitutions and equations. Following Hermite, all treatises, except Jordan's, therefore limited themselves to the considerations of the substitutions ($k\ ak$ + b) and ($k\ \frac{ak+b}{ck+d}$) related to solvable equations of prime degree and to modular equations.

[48] In the introduction of his 1882 thesis, Edmond Maillet attributed to Hermite the introduction of the analytical notation ($x_k\, x_{\varphi(k)}$) itself [Maillet, 1892, p. 2].

On the other hand, we have seen that Jordan had developed a specific approach to general classes of solvable equations by dealing with general linear groups. The higher level of generality of Jordan's groups was nevertheless problematic. A "general" development was indeed supposed to be valid for all the objects under consideration, such as in Hermite's 1863 paper that both stated a truly general result on the analytic representation of substitutions in n variables and investigated special cases. On the contrary, Jordan's n-ary linear substitutions did not provide any general solution to the problem of the number of values of functions for which they had been introduced.

In the 1870s, Jordan's general linear groups were explicitly criticized by Kronecker for their false generality and formal nature. [Brechenmacher, 2007] Indeed, Kronecker accused Jordan of having mixed up tools relative to the orientation he had given to his investigations (i. e. n-ary linear substitutions) with the inherent significations of "objects of investigation" (e.g. the number of values of functions, the analytic forms of all substitutions on 5 letters etc.). Following Kronecker, in his 1882 treatise on substitutions, Eugen Netto did not consider general linear groups as a special type of group (in contrast with cyclic, abelian, metacyclic, and modular groups): they were limited to the object of investigation of the problem of the analytic representation of substitutions. [Netto, 1882, p.128-139]

For decades Galois's legacy opposed two approaches which both aimed at reaching the "essence" of mathematics. On the one hand, some authors, following Hermite and Kronecker, aimed at characterizing the special nature of general equations of a given degree. On the other hand, some others, following Jordan, focused on the relations between classes of solvable equations (or groups) of a general degree n. The two approaches were nevertheless both presented in Jordan's Traité. The first approach was indeed included in the synthesis of the *Traité*'s Livre III on the types of irrational quantities associated to types of equations. [Brechenmacher, 2011] The second went with Jordan's specific practice of reduction. It structured the Traité in a complex chain of generalizations of special model cases. This approach had almost no circulation until it was developed in the 1890s in the Galois fields network.

Recall that Moore's 1893 investigations on linear fractional substitutions $(k\,\frac{ak+b}{ck+d})$ were initially stemming from the first of the two above approaches, which Moore had learned from the Klein and Fricke textbook. Yet, in aiming at generalizing the groups attached to modular equations of order 5, 7, and 11 to n variables, his paper collided with the specificity of Jordan's general linear groups.

5.2 Number-theoretic imaginaries as an autonomous theory

We have seen that even though number-theoretic imaginaries were tightly linked to substitutions in Galois's works, the latter presented his 1830 *Note* as an autonomous topic in number theory. In the 1854 edition of Serret's *Cours*, Galois's imaginaries were presented as the conclusion of a series of three lectures devoted to the theory of congruences. Unlike the notion of primitive root of binomial congruences, they were not connected to cyclotomic (and abelian) equations or to the additional notes of Hermite and Kronecker on Galois's criterion of solvability. Apart from a short note of [Allegret, 1856], Galois imaginaries were not used again in connection with equations until the works of Jordan in the mid-1860s. When Dedekind started to develop his approach on higher congruences in 1857, he alluded to both the presentations of Theodor Schönemann in the legacy of Gauss and Abel, and those of Serret in the legacy of Galois.

In the third edition of the *Cours* in 1866, Serret went further, inscribing number-theoretic imaginaries in a comprehensive theory of congruences. The presentation included a development on integer polynomials modulo a "modular function," [Serret, 1865], [Serret, 1866] thereby following Cauchy's approach to congruences rather than Galois's. Serret's approach was endorsed later by treatises such as [Jordan, 1870], [Borel et Drach, 1895], and [Vogt, 1895].

Yet, we have seen that Jordan's presentation included Galois's original approach in addition to Serret's. Moreover, in Jordan's *Traité*, Galois's imaginaries could not be dissociated from substitutions theory: as in Galois's works, both topics were interlaced through the issue of the indexing of letters and of the analytic representation of substitutions, which gave rise to the investigations on the general linear group as originating from direct products of cyclic groups. Further, contrary to Serret's approach, Jordan appealed to a traditional way of legitimizing the use of imaginaries by resorting to the analogies carried on by "instruments of computation":

> The consideration of the imaginary roots of irreducible congruencies introduces itself naturally in my analysis, which would have certainly not been successful should have I hesited to adopt them. I would be pleased to have contributed by these examples to show the power of this new instrument of analysis, that some eminent geometers are still apparently considering with mistrust. [Jordan, 1867b, p.269]

It is well known that Kronecker contested the legitimacy of such traditional presentations of algebraic imaginaries. In his influential 1882 *Grundzüge*, he developed an effective presentation of the problem in the tradition of congruences of polynomial forms, as developed by Cauchy and Serret in France.

Despite Kronecker's opposition, Jordan's traditional perspective on Galois imaginaries continued to circulate, especially from Jordan to [Gierster, 1881], [Klein et Fricke, 1890], [Moore, 1893], and [[Burnside, 1894]. Moore's 1893 congress paper especially illustrates that both Serret's *Cours* and Jordan's *Traité* were alternative reference to Kronecker's theory in the 1890s. In the framework of Kronecker's 1882 *Grundzüge*, Serret's "fonctions modulaires" should have been understood by Moore as "modular systems" on "domains of rationality". As a matter of fact, Hölder resorted in 1893 to Kronecker's framework to formulate Galois imaginaries. [Hölder, 1893] In contrast with Kronecker's legacy, the influence of Jordan's approach can be seen in the parallel evolution of the works of Moore (and later Dickson) and Burnside. As shall be seen in the next section, both Moore and Burnside indeed investigated the same groups (*i.e.* $PSl_2(p)$, $PSl_3(p)$, $PSl_m(p)$, and eventually $Gl_n(p)$). Moreover, both stated independently the same theorems.

5.3 Jordan's Traité as a Chicagoan textbook

We shall now question how, in the context of the institutionalization of group theory in 1890s, Jordan's *Traité* could have supported the discontinuous circulation of some specific algebraic practices from Paris in the late 1860s to Chicago at the turn of the 20th century.

We have seen that Moore had resorted to Klein's mediation of a longstanding French tradition. But as for the circulation of either linear fractional substitutions or number-theoretic imaginaries, Serret's *Cours* played initially a much more important role than Jordan's *Traité*. We shall see that this situation changed in the years following the Chicago congress.

In 1894-1895, Moore published two papers closely related to his 1893 lecture. The first connected the groups of automorphisms of an abelian group of order 2^3 and of type (1,1,1) to the simple linear group of 168 elements (*i.e.* $PSl_3(F_2)$). [Moore, 1894, p.65] As was already the case with Galois fields, Moore's approach can be understood as shedding new light on older works. We have indeed seen that linear groups had been presented as originating from abelian groups of type (1, 1,..., 1) in Jordan's *Traité*.

This traditional dimension of the problem sheds light on the parallel works developed almost simultaneously by Moore and Burnside. About nine months before Moore, Burnside had indeed proven the more general result that the group of automorphisms of the abelian group of p^n elements of type (1, 1,…,1) is isomorphic to $GL_n(p)$[49]. [Burnside,

[49] Neither Moore nor Burnside referred to one another at that time and it is unclear if their works were independent or were actually competing. The introduction of [Burnside, 1896] seems to have aimed at contradicting [Moore, 1895] and [Moore, 1896] in claiming that the notion of the group of automorphisms of a group was not a new concept. In

1894, p.139] Exactly the same theorem constituted the core of Moore's 1895 "Concerning Jordan's Linear Groups." This paper was presented as a demonstration of the efficiency of Galois fields in group theory; it concluded with tables of primitive elements of Galois imaginaries that had been computed by Moore's students. Amongst them, Dickson might have been already in charge of investigating the works of Mathieu. He had indeed identified that a group of substitutions on p^n letters introduced in [Mathieu, 1861b] was isomorphic to $GL_n(p)$. Moore concluded, "this seems to be the source from which Mr Jordan's linear groups were drawn". [Moore, 1895]

Dickson's thesis would then especially investigate the relations between the works of Mathieu and Jordan. It ended with a proof that $GL_n(p)$ is isomorphic to the Betti-Mathieu group, i.e., the set of all "quantics" (polynomials) of an analytic form $\varphi(k)$ as follows that represent a substitution on $GF(p^{mn})$ (considered as a vector space on $GF(p^n)$):

$$\phi(k) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i k^{p^i}$$

for each $a_i \in GF(p^n)$

As a result, Dickson's investigations raised some new interest in Mathieu's works on multiply transitive groups on Galois fields. These groups indeed provided classes of simple groups and it was through their investigations that the notion of Galois field circulated to the works of Miller and, from there, to the works of Séguier (1901-1904, see esp. [Séguier, 1904a]) and Frobenius (1902, 1904, see esp. [Frobenius, 1902]).

Moreover, Dickson's very close reading of Jordan's *Traité* resulted in a flood of papers that systematically generalized results from linear substitutions on F_p to $GF(p^n)$[50]. [Parshall, 2004, p.265]

In Dickson's 1901 monograph on linear groups, the theorem on the Betti-Mathieu group was the hinge between the first section on Galois fields, based on Hermite's 1863 approach on "substitution quantics," *i.e.* the investigation of the analytic representation of substitutions of less than 11 variables, and the second section on Jordan's n-ary linear groups. This new synthesis between the approaches of Hermite and Jordan acted as an

---

1896 Moore sent to the London mathematical society a paper on the abstract definition of the symmetric group. Burnside introduced the paper he published on the same topic by claiming he had asked the Council of the society permission to withdraw his communication given the "more complete" results stated by Moore. [Burnside, 1897a] Burnside would not refer to either Moore or Dickson in his 1897 treatise and the other way round with [Dickson, 1901].

[50] The very close reading of Jordan by Dickson is illustrated by the latter's adoption of terminologies which had already been much criticised such as the one of "abelian group" for what Hermann Weyl would designate as "symplectic groups".

impulse for the development of the Galois fields network both within the framework of the Chicago school and for other close readers of the *Traité*, especially in France.

5.4 Linear groups in Galois fields : a shared algebraic culture

Let us now get back to the issue of the collective dimensions of the Galois fields network. This network can now be understood as a shared algebraic culture. On the one hand, this culture was based on Serret's presentation of Galois's number theoretic imaginaries as an autonomous topic and on Hermite's approach to the problem of the analytic representation of substitutions. On the other hand, it was rooted on Jordan's intertwining of Galois's imaginaries with the reduction of the analytic representation of n-ary linear substitutions.

Jordan's approach especially played a key role in the specificy of this algebraic culture as regard to some other contemporary works. It's legacy can not only be traced in France in the works of authors such as Poincaré, Autonne, Maillet, Séguier, etc., [Brechenmacher, 2012a] but it also circulated in the U.S.A. after Dickson's 1896 thesis.

It was because they shared this culture that some French and American authors were able to interact with each others, even though most of them did not have any direct contact and did not share any social framework, as is exemplified by such different figures as de Séguier, an aristocrat jesuit abbot, and Schottenfels, one of the first women to graduate in mathematics at Chicago, or as Dickson, who had met with Jordan in person during his one-year student trip in Europe, and other Americans who had not developed a close reading of the *Traité*, such as Miller.

Communication was nevertheless partial and was actually mostly limited to the shared algebraic practices mentioned above. Yet, this shared algebraic culture was sufficient for texts to circulate between France and the U.S.A., to respond to each other, and even for controversies to detonate. A telling example is the new formulation that was given repeatedly and independently to Jordan's "origin" of the linear group as the theorem stating that the group of automorphisms of an elementary abelian group A is the general linear group $Gl(F_{p^n})$.

This theorem was, for instance, stated by Le Vavasseur in 1895. Given a root x of the congruence

$$f(x) \equiv 0$$

Levavasseur considered the Galois number theoretic imaginary

$$j = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots + \alpha_n x^{n-1}$$

and formed the group of the n distinct operations

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

as generated by a unique operation a:

$$a^j = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \ldots a_n^{\alpha_n}$$

This analytic formulation of the problem was sufficient for Miller to react promptly to Le Vavasseur's note in claiming his priority by sending a note to the Académie de Paris. The discussion between the two went on with two other notes. Yet, this theorem had also been stated a few months earlier by Burnside and Moore. And it would be stated again a few months later by Dickson and Séguier. As has been seen in the previous section, the issue at stake had a long background in the context of the problem of the number of values of functions. Authors such as Le Vavasseur, Miller, Moore, Dickson or Séguier shared a same basis of sources even though they also had divergent individual agendas and belonged to various social spaces.

5.5 A space of circulation of specific practices of reductions of analytic representations

The network of texts that revolved around "Jordan's linear groups in Galois field" at the turn of the 20th century had thus underlying it a shared algebraic culture. In this section, we shall discuss further the procedures of reductions of the analytic forms of substitutions that were at the root of this shared culture.

The growing importance of linear groups was a large-scale trend at the turn of the 20th century. Yet, in the early 1890s, "linear groups" usually designated the groups of binary or ternary unimodular fractional linear substitutions Klein and his followers had investigated (i.e. $PSL_2(p)$ and $PSL_3(p)$). Even though Klein's linear groups would still play an important role at the turn of the century, [Wiman, 1900] some collective interest in Jordan's general linear groups in Galois fields emerged by that time. A telling example is the adoption of the term "special linear groups" for designating what used to be "linear groups" in the early 1890s.

The label linear groups was thus far from pointing to a unified category at the turn of the 20th century. For instance, Weber's influential *Lehrbuch der Algebra* introduced homogeneous linear groups of n variables by appealing to the analytic form of n-ary linear substitutions. But it nevertheless only stated a few general properties before focusing on special groups such as $PSL_2(p)$. In contrast, Dickson's 1896 thesis followed Jordan in introducing $Gl_n(p)$ as the maximal group in which an abelian group of type (1,1,..,1) would be a normal subgroup. The second part of the thesis was then devoted to generalizations of Jordan's results from F_p to $GF(p^n)$.

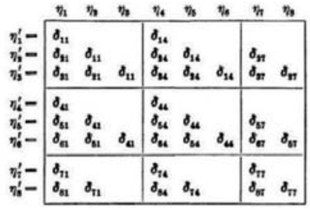
Moreover, various ways of dealing with linear substitutions had parallel circulations until the constitution of linear algebra as a discipline in the 1930s. [Brechenmacher, 2010] Amongst these, the most influential approach was based on Frobenius's 1877-1879 presentation of the theory of bilinear forms. This approach appealed to symbolic methods and to computations of invariants by determinants such as Weierstrass's elementary divisors. [Hawkins, 1977] It incorporated the notion of matrix in the 1890s, and played a key role in Frobenius's representation theory. [Brechenmacher, 2006, p.279-461]

But the main protagonists of the Galois fields network shared an alternative approach based on Jordan's reduction of a linear substitution to its canonical form. This collective attitude has to be regarded as an important specific feature of the Galois fields network. Jordan's canonical form did indeed embody the method of reduction we have seen to be specific to Jordan's relation to Galois. It especially resorted to the unscrewing into the two forms of actions of cycles ($k\ gk$) and ($k\ k + a$) which it assimilated to issues involving n variables. Yet, Jordan's canonical form theorem had almost disappeared from the public scene since it had been strongly criticized by Kronecker a few years after it had been stated. [Brechenmacher, 2007] Kronecker not only rejected the formal generality of Jordan's linear groups, but also criticized the non-effectiveness of the canonical reduction, which required the determination of the roots of arbitrary algebraic equations. Moreover, Frobenius not only presented Jordan's canonical form as a corollary of Weierstrass's elementary divisor theorem, but also insisted that the validity of Jordan's form was limited to the case when one would allow the use of "irrationals" such as "Galois's imaginary numbers."[Frobenius, 1879, p.544] In contrast, the reformulation Kronecker had given to Weierstrass's theorem in 1874 was based on a rational method of computations of invariants in any "domain of rationality" (*i.e.* the invariant factors of matrices in a principal ideal domain).

During the 1880s and 1890s, Jordan's canonical form had an underground circulation in the works of authors such as Poincaré or Élie Cartan, where it was neither considered as a theorem nor attributed to Jordan. [Brechenmacher, 2012a] On the contrary, it circulated in plain sight at the turn of the century. Much work would be devoted to making some procedures of matrix decomposition explicit that had never been considered as mathematical methods per se until then ([Burnside, 1899], [Dickson, 1900], [Dickson, 1902], [Séguier, 1902], [Autonne, 1905], [Séguier, 1908]). Moreover, Séguier and Dickson would both publicly challenge the traditional structure of the theory of bilinear forms ([Séguier, 1907], [Dickson, 1928]). Later on in the 1930s, decompositions to canonical forms would lay the ground for expositions of the theory of matrices, such as the ones of Cyrus Colton Mac Duffee a student of Dickson. [Mac Duffee, 1933]

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c & 0 \\ 0 & 0 & e & d & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{Vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & a \end{Vmatrix},$$



Poincaré1884 Autonne 1905 Dickson 1901

In a word, the Galois fields network had underlying it a shared algebraic culture based on the space of circulation of key algebraic practices of Jordan's *Traité*. The use of the terminology "practice" here aims at highlighting the fact that reducing a substitution to its canonical form was not limited to a computational process. Unlike the static nature of the invariants of the Frobenius theory, this approach was based on dynamic decompositions of the analytic representations of matrices (or "Tableaux" as the French used to say at the time). Moreover, Kronecker's criticisms of canonical forms in 1874 resorted to issues involving the nature of the essence of mathematics, which the latter had laid on the special objects of investigations of arithmetic (forms, especially) as opposed to the general relations shown by groups in algebra.

The extent of the space of circulation of algebraic practices such as Jordan's was neither directly the consequence of the efficiency of the underlying procedures or of a preexisting social framework. It is therefore difficult to determine the respective roles played by shared perspectives on the Traité on the one hand, and preexisting spaces of circulation on the other hand. Such issues shall thus be left open in the present paper. They would require further investigations on algebra and number theory at the turn of the 20th century, with a closer attention to actors, such as Le Vavasseur, Séguier, or Miller, who did not have key positions in the main centers of production of mathematical knowledge. The question of the time-period during which the Galois fields network functioned will also be left open in this paper. To begin with, the fact that the expression "champs de Galois" was used for a long time in France in parallel to the use of the term "corps fini" should be studied further[51]. Second, the linear algebraic identity of the network is associated with other developments over the course of 19th century. For instance, some of the procedures of decomposition underlying Jordan's canonical form circulated from Cauchy's "calcul des Tableaux" to Cambridge in the 1840s, were incorporated into Cayley and Sylvester's matrices in the 1850s, and circulated with

[51] After 1905 the intertextual relationships seemed to change as well as the topics studied. On the one hand, the use of the reference to Galois field would be more widely used in the U.S.A. On the other hand, the works of Dickson as well as the ones of Séguier would focus on the invariants of quadratic forms and their geometric interpretations.

matrices to the U.S.A. where they would meet again with the "Tableaux" in the Galois fields network. [Brechenmacher, 2010]

Conclusion

The introduction of Galois fields in Chicago in 1893 might have appeared somewhat chaotic at first sight. But, on the one hand, Moore's approach unveiled a long tradition dealing with substitutions and number-theoretic imaginaries. On the other hand, Moore's move was coherent with some other contemporary reorganizations of the legacies of Klein and Kronecker in finite group theory. Indeed, in that same year of 1893, Weber appealed to Dedekind's *Körper* to lay new grounds for "Galois's theory of general equations". As a conclusion of this paper, I shall discuss the impact of Jordan's legacy in regard with the one of Dedekind. Both approaches had indeed been blamed by Kronecker in the 1870s-1880s. Moreover, in the mid-1890s, Jordan's approach was being developed in the U.S.A. at the same time as Dedekind's legacy was being incorporated in algebraic number theory in Germany: in this framework, number-theoretic imaginaries were presented as a special case of Endlicher Körper: the Congruenz Körper. [Weber, 1893, p.534]

In the 1896 edition of his congress paper, Moore noted the equivalence of the terms "Field" and "Endlicher Körper". Yet, we saw that the algebraic number aspect of Galois theory as developed by Kronecker who rejected Jordan's approach – had not played any role in Moore's approach. Moreover, the notion of Galois field did not have the same evolution as that of Körper. As a matter of fact, Moore repeatedly insisted that the "purely abstract form" of Galois fields "would seem to fit best for immediate use wherever it can with advantage be introduced", [Moore, 1896, p.212] *i.e.* the investigation of "Jordan's linear groups". [Moore 1895, p. 38] When he eventually referred to Kronecker in 1897, [Moore, 1897] Moore presented modular systems as a "concrete purely arithmetic phrasing" of abstract Galois fields. [Moore, 1898, p.281] In 1898, the bibliography of Dickson's *Report* on linear groups included the works of Schönemann (as well as the ones of Auguste Pellet in the 1880s), thereby illustrating the efforts that had been done for making the collective dimensions of both Galois fields and linear groups precise. But Dickson's *Report* nevertheless insisted on the autonomy of abstract Galois fields in linear group theory in connection with number theory. In the legacy of the essence Jordan attributed to the theory of order, Galois fields came to represent an abstract algebraic alternative to Weber-Hilbert's arithmetic-algebraic Körper.

Linear groups in Galois fields eventually reorganized lines of development in a no less radical way than Weber and Hilbert did when they celebrated Dedekind's approach. References to Galois played a key role in the reorganizations based on both the notions of field and Körper. Both had jumped over Kronecker on behalf of two alter egos, Jordan and Dedekind. In Moore's 1893 congress paper, Dickson's 1898 *Report*, or the latter's 1901 Linear Groups, the reference to Jordan-Galois played a role analogous to the reference to Dedekind-Galois in Weber's 1893 "Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie" the 1895 *Lehrbuch*, or Hilbert's 1897 *Zahlbericht*.

Let end the present paper with some considerations on the type of collective dimensions of mathematics we have investigated. We have seen that the history of algebra is not limited to issues related to the origins of diffusions of some abstract notions or structures. On the contrary, the circulations of some specific algebraic practices and forms of representations played a key role in shaping some collective dimensions of mathematics that did not correspond to any discipline, nation, or institution. The example of the quite unexpected circulation of Jordan's specific approach in Chicago, despite a very strong German influence, highlights how complex some algebraic cultures can be. The identification of such cultures not only requires the micro-historical identification of some specific procedures. It also necessitates the analysis of the circulation of these procedures, in appealing to scale-games between the local and the global, the short-term and the long run. The history of algebra especially requires a careful attention to practices of writings. As we have seen, modalities of representations are often interlaced with some specific procedures, as well as with both cultural and epistemic values of generality or simplicity. We have seen also that the systematic investigation of traces of intertextual relations sheds light on some implicit collective forms of references, such as the one that lied beneath expressions such as the "analytic representation of substitutions" or "linear groups in Galois fields". This situation highlights the crucial role played by some networks of texts for the identification of some collective dimensions of mathematics at a time when "algebra" was not yet referring to an object-oriented discipline.

One should nevertheless keep in mind that each individual actor was involved in several networks of texts at the same time, as well in several social spaces. Recall that the starting point of the network we have analysed in this paper was the choice of a point of reference, i.e., Moore's 1893 congress paper. It is from this point of reference that intertextual references have been worked out systematically. The choice of another point of reference, such as Burnside's works, would have resulted in a different collection of texts, with a much stronger presence of some works on matrices published in the U.K. Moreover, at the beginning of our investigations, a specific problem has been posed, that is the one of the collective dimension of a group of texts published from 1893 to 1907. It is this collective dimension on the short term we have identified as a shared algebraic culture. In this purpose, we have investigated a collection of texts in the long run of the 19th century. Yet, the coherence of this corpus results from the retrospective point of view of the turn of the century, especially in the sense that some of these texts were considered altogether by the Chicagoans as "French" mathematics. But this whole collection did no correspond to any objective collective dimension *per se*. On the contrary, its texts belonged to various collective dimensions. The "theory of order" in which Jordan inscribed his early works was for instance very different from the context in which Hermite's works on the analytic representation of substitutions took place.

To be sure, networks of texts should nevertheless not be reified as an abstract notion. Yet, investigating intertextual references nevertheless provides a heuristic method for identifying various collective spaces in which mathematics have evolved.

Annex 1. Indexations and the analytic representations of cycles

It is well known that the cubic roots of unity can be either expressed by radicals:

$$1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

or by the exponential notation :

$$1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{-2i\pi}{3}}$$

The above form of representation highlights that all the roots can be expressed by the sequence (0, 1, 2) of the powers of one of them, i.e., a primitive root such as $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Indeed, $\omega^2 = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$, $\omega^3 = 1 = \omega^0$ etc. The three cubic roots are thus indexed by the additive group $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: a root is turned into the successive one by the cycle that is represented analytically by (x x + 1).

But the sequence of the roots can also be reindexed by using another analytic representation of a cycle: (x gx). For instance, the cycle, (x $2x$) generates the multiplicative group $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^*$: ω, ω^2, $\omega^4 = \omega$ etc.

This double indexation is crucial. It allows to decompose simultaneously the set of the roots of unity into subsets, or blocks, and cyclic groups into subgroups.

Let us consider in more details the example of the seventh roots of unity, associated to the additive group $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. These roots can be represented as points on a a circle:

Let g = 3. Starting with the primitive root $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right)$, corresponding to the point B, the operation ($x3x$) provides all the roots of unity, less the unity itself (represented by the point A):

• ω^3, corresponds to the point D

• ω^{3^2}, corresponds to the point *C* because $3^2 \equiv 2 \; mod(7)$

• ω^{3^3}, corresponds to the point *G* because $3^3 \equiv 6 \; mod(7)$

• ω^{3^4}, corresponds to the point *E* because $3^4 \equiv 4 \; mod(7)$

• ω^{3^5}, corresponds to the point *F* because $3^5 \equiv 5 \; mod(7)$

• ω^{3^6}, corresponds to the point *B* because $3^6 \equiv 1 \; mod(7)$

The cycle $(x \; 3x)$ thus generates the cyclic group $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*$.

But let us now consider the operation $(x \; g^2x)$, i.e., $(x \; 2x)$ (because $3^2 \equiv 2 \; mod(7)$). Starting with ω, one only gets the three roots corresponding to the points (*B*, *C* et *E*):

• ω^2, corresponds to the point *C*

• ω^{2^2}, corresponds to the point *E* because $2^2 \equiv 4 \; mod(7)$

• ω^{2^3}, corresponds to the point B because $2^3 \equiv 1 \; mod(7)$

The set of the roots has thus been decomposed into the two blocks corresponding to (*B*, *C* et *E*) on the one hand, and (*D*, *F* et *G*) on the other hand.

This procedure of decomposition allows proving that cyclotomic equations can be solved by radicals. For expressing by radicals the seventh roots of unity, it is compulsory to solve an equation of the sixth degree. Yet, the decomposition of the roots into two blocks allows to reduce the problem to the one of the resolution of two equations, one of the second degree and the other of the third degree. Indeed, if one sums the elements in each of the blocks, the two resulting expressions:

$$\omega + \omega^2 + \omega^4$$

and

$$\omega^3, \omega^5, \omega^6$$

are the roots of an equation of the second degree.

It is important to note that one can pass from one block of roots to the other by multiplying the indices by $g^3 \equiv 6 \; mod.7$. Indeed:

$$2 \times 6 = 12 \equiv 5 \; mod(7)$$

$$4 \times 6 = 24 \equiv 3 \; mod(7)$$

$$1 \times 6 = 6$$

Geometrically, the operation (x $6x$) can be understood as a rotation of the circle on itself, of angle $\frac{4\pi}{7}$, and that turns B,C,E on D,F,G.

On the other hand, the permutation (x $x + 2$) allows circulating between the roots of the same block: it can be understood as a translation that turns each root into the following one.

In sum, the cycle (x gx) allows to decompose the roots into blocks, that can be turned one into the other by rotations of the circle, while the operation (x $x + a$) permits to translate the roots within the same block.

Let us now detail the case of the binomial equation of degree $p = 19$, *i.e.* of the cyclotomic equation of degree $p - 1 = 18$. The 18 cyclotomic roots:

$$\omega, \omega^2, ..., \omega^{18}$$

can be decomposed into 6 blocks (*i.e.* Gauss's periods) of 3 roots because $18 = 3 \cdot 6$. The equation then factors into two equations of degree 3 and 6. For instance, the block of 3 roots η_1,η_2,η_3 of the equation

$$x^3 + x^2 - 6x - 7 = 0$$

corresponds to the following sums:

$$\eta_1 = \omega + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{11} + \omega^{12} + \omega^{18}$$

$$\eta_2 = \omega^2 + \omega^3 + \omega^5 + \omega^{14} + \omega^{16} + \omega^{17}$$

$$\eta_3 = \omega^4 + \omega^6 + \omega^9 + \omega^{10} + \omega^{13} + \omega^{15}$$

Each sequence of exponents in each of the sum above is indexed by the successive powers of a primitive root *mod.*19, such as $g = 2$ (because $2^{18} = 262144 = 1 + 19.13797$). The indexation (1, 7, 8, 11, 12, 18) of the powers of the ω that composes each of the above η_i corresponds to the 3 cycles of 6 powers of 2^3 *mod.*19:

$$(2^3)^0 \equiv 1 mod(19)$$

$$(2^3)^1 \equiv 8 mod(19)$$

$$(2^3)^2 \equiv 7 mod(19)$$

$$(2^3)^3 \equiv 18 mod(19)$$

$$(2^3)^4 \equiv 11 mod(19)$$

$$(2^3)^5 \equiv 12 mod(19)$$

The exponents of the second sequence (2, 3, 5, 14, 16, 17) are given by the multiplication of the above sequence by g ≡ 2 *mod*(19):

$$1 \times 2 \equiv 2 mod(19)$$

$$7 \times 2 \equiv 14\ mod(19)$$

$$8 \times 2 \equiv 16\ mod(19)$$

$$11 \times 2 \equiv 3\ mod(19)$$

$$12 \times 2 \equiv 5\ mod(19)$$

$$18 \times 2 \equiv 17\ mod(19)$$

Similarly, the multiplication by $g^2 \equiv 4\ mod(19)$ provides the exponents (4, 6, 9, 10, 13, 15) of the third sequence:

$$1 \times 4 \equiv 4 mod(19)$$

$$7 \times 4 \equiv 9 mod(19)$$

$$8 \times 4 \equiv 13 mod(19)$$

$$11 \times 4 \equiv 6 mod(19)$$

$$12 \times 4 \equiv 10 mod(19)$$

$$18 \times 4 \equiv 15 mod(19)$$

Annex 2. The number of values of functions and the resolution of equations by radicals

The quadratic equation

Let us start with the case of the quadratic equation on the field of rational numbers:

$$x^2 - c_1x + c_2 = 0$$

The coefficients c_1 and c_2 are symmetric functions of the roots x_1 and x_2. They are thus functions that take only a single value by permutations of the roots:

$$c_1 = x_1 + x_2\ ;\ c_2 = x_1x_2$$

The other way round, any function that take a single value can be expressed rationally in the number field to which the coefficients c_1 and c_2 belong. On the contrary,

$$x_1 - x_2$$

takes two values by permutation of the roots and is therefore not rationally known on Q. One can look for the group of substitutions that leaves this function invariant. This group thus leaves also the root x_1 invariant. Thus, x_1 and $x_1 - x_2$ can be expressed rationally one with the other:

$$x_1 = \frac{c_1 + c_2 - x_2}{2}$$

Thus, if one adjoins to the initial number field the number $x_1 - x_2$, one also gets the number x_1: in the 19th century, functions of many values - or resolvents- were used for dealing with what would be nowadays understood as fields and fields extensions.

Let us now come back to the quadratic equation. The discriminant Δ is a function of a single value and can thus be expressed rationally with c_1 and c_2 :

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = c^2{}_1 - 4c_2$$

The function $\sqrt{\Delta}$ is a two-valued function, as well as the roots x_1 and x_2 themselves. These functions can thus be expressed rationally one with the other by the well known formulas that give the resolution by radicals of the quadratic equation.

The general cubic

In the case of the cubic

$$x^3 - c_1x^2 + c_2x - c_3 = 0$$

The resolution necessitates the determination of three functions x_1, x_2, x_3 that take three values by permutations, *i.e.* the determination of one function that take 3! = 6 values. Let a_1, a_2, a_3 be three parameters, the function $\xi = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ is precisely a function of 3! = 6 values. Following Enrico Betti, such a function was called a "Galois resolvent" in the 19th century. If one expresses the roots of the cubic by radicals, then ξ will also be expressed by radicals, and reciprocally.

In a way, the problem of the algebraic resolution of equations thus consists in passing from three functions of a single value, c_1, c_2, c_3, to a function of six values, ξ.

Like in the case of the quadratic equation, the root of the discriminant provides a two-values function by which any two-valued function can be expressed rationally. Thus, to solve the cubic, one has to find a function of the roots, of which a certain power takes two values. Such is the case of the cube of the Lagrange resolvent:

$$\phi = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3$$

where ω is a primitive root of unity ($\omega^3 = 1$).

One can thus express φ rationally thanks to $\sqrt{\Delta}$:

$$\phi^3 = \tfrac{1}{2}\left(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_2 + 3\sqrt{-3\Delta}\right)$$

from which one can deduce Cardano's famous formulas.

In general

To solve an equation of degree n necessitates the consideration of a resolvent function that takes n! distinct values. It was through the consideration of all the substitutions leaving such a function invariant that Galois defined the group of an equation (that is, in modern parlance, the group that let stable the fields of the roots). One then has to investigate the groups of substitutions that leave invariant the factors into which the initial equation break when one adds some roots to the initial fields of coefficients.

A Galois resolvent is a function of n! values. It is therefore invariant only for the trivial group, *i.e.* the group reduced to the permutation identity. On the opposite, a symmetric function is invariant for all the substitutions of the symmetric group. Adjoining roots to an equation, as we did above with $\sqrt{\Delta}$, implies breaking the Galois resolvent into factors. To each of these factors, one associate the substitution group that leaves it invariant. For instance, for n = 4, the following function can be understood as expressing the relations between the roots of an irreducible equation of the fourth degree:

$$\varphi = x_1x_2 + x_3x_4.$$

This function takes three values for all the 4! = 24 permutations of Σ(4):

$$x_1x_2 + x_3x_4,\ x_1x_3 + x_2x_4,\ x_1x_4 + x_2x_3$$

The group G associated to the function φ is composed of the eight substitutions that leave φ invariant:

$$G = I,\ (x_1x_2),\ (x_3x_4),\ (x_1x_2)(x_3x_4),\ (x_1x_3)(x_2x_4),\ (x_1x_4)(x_2x_3),\ (x_1x_3x_2x_4),\ (x_1x_4,\ x_2x_3).$$

Bibliographie

ADHÉMARD, R. d., (1922). Nécrologie. Camille Jordan. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 3:65–66.

ALLEGRET, A. (1856). Nouvelles recherches sur le caractère et les propriétés des équations algébriques solubles par radicaux. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 43:275.

AUTONNE, L. (1905). *Sur les formes mixtes*. A. Rey, and Gauthier-Villars, Lyon, and Paris.

— (1913). Recension, de Séguier. *Revue générale des sciences pures et appliquées*.

BETTI, E. (1852). Sulla risoluzione delle equazioni algebriche. *Annali di scienze matematiche e fisiche*, 3:. 49–115.

BOLZA, O. (1891). On the theory of substitution-groups and its applications to algebraic equations. *American Journal of mathematics*, 13:59–144.

BOREL, E. et DRACH, J. (1895). *Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'algèbre supérieure*. Nony, Paris.

BOUCARD, J. (2011a). Louis Poinsot et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois ? *Revue d'histoire des mathématiques*, 17(1):41–138.

— (2011b). Un « *rapprochement curieux de l'algèbre et de la théorie des nombres* » : *études sur l'utilisation des congruences en France de 1801 à 1850*. Thèse de doctorat, Université Paris 6.

— (2006). *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930). Formes de représentations et méthodes de décompositions*. *Thèse de doctorat*, Ecole des hautes études en sciences sociales.

— (2007). La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 13:187–257.

— (2010). Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques. *Revue de Synthèse*, 4:569–603.

— (2011). Self-portraits with Évariste Galois (and the shadow of Camille Jordan). http://hal.archives-ouvertes.fr/aut/Frederic+Brechenmacher/.

— (2012a). Autour de pratiques al- gébriques de Poincaré : héritages de la réduction de jordan. http://hal.archives- ouvertes.fr/aut/Frederic+Brechenmacher/.

— (2012b). Galois got his gun. *à paraître*.

— (2012c). Linear groups in galois fields. a case study of tacit circulation of explicit knowledge. *Oberwolfach Reports*, 4-2012:48–54.

— BRECHENMACHER, F. et EHRHARDT, C. (2010). On the identities of algebra in the 19th century. *Oberwolfach Reports*, 7(1):24–31.

BRIAN, T. et al., éditeurs (1893). *The World's Columbian Exposition, Chicago, 1893*. International Pub. Co, Philadelphia and Chicago.

BRIOT, C. et BOUQUET, C. (1875). *Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques*. Paris, 2de édition.

BURNSIDE, W. (1894). Notes on the theory of groups of finite order. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 25:9–18.

— (1896). On the isomorphism of a group with itself. *Proceedings of the London Mathematical Society,* 27:354–367.

— (1897a). Note on the symmetric group. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 28(119)129).

— (1897b). *Theory of Groups of Finite Order*. Cambridge University Press, Cambridge.

— (1899). On the reduction of a linear substitution to the canonical form. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 30:180–194.

CAUCHY, A.-L. (1815). Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. *Journal de l'École polytechnique*, 10: 29–112.

— (1844). Mémoire sur les arrangements que l'on peut former avec des lettres données, et sur les permutations ou substitutions à l'aide desquelles on passe d'un arrangement à un autre.

— (1845). Mémoire sur la résolution des équations linéaires symboliques, et sur les conséquences remarquables que cette résolution entraîne après elle dans la théorie des permutations.

— (1878). Desiderata and suggestions. n ° 1: The theory of groups. *American journal of Mathematics*, 1:50–52.

COLE, F. N. (1892). Simple groups from order 201 to order 500. *American journal of Mathematics*, 14:378–388.

CORRY, L. (1996*). Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Birkhäuser, Basel.

COUTURAT, L. (1898). Sur les rapports du nombre et de la grandeur. *Revue de métaphysique et de morale*, 6:422–447.

DAHAN DALMEDICO, A. (1980). Les travaux de cauchy sur les substitutions. étude de son approche du concept de groupe. *Archive for History of Exact Sciences*, 23: 279–319.

DESPEYROUS, T. (1861). Mémoire sur la théorie générale des permutations. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (2) 6:417–439.

DICKSON, L. E. (1899). Report on the recent progress in the theory of linear groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, (2) 6:13–27.

— (1900). Canonical form of a linear homogeneous substitution in a galois field. *American Journal of Mathematics*, 22:121–137.

— (1901). *Linear groups with an exposition of the Galois field theory*. Teubner, Leipzig.

— (1902). Canonical form of a linear homogeneous transformation in an arbitrary realm of rationality. *American Journal of Mathematics*, 24:101–108.

— (1924/1928). A new theory of linear transformation and pairs of bilinear forms. *Proceedings Congress Toronto*, pages 361–363.

DIEUDONNÉ, J. (1962*). Notes sur les travaux de Camille Jordan relatifs à l'algèbre linéaire et multilinéaire et la théorie des nombres*, *in* [Jordan Œuvres, 3, p. V-XX].

DUBREIL, P. (1982). L'algèbre, en france, de 1900 à 1935. *Cahier du Séminaire d'histoire des mathématiques de l'IHP*, 3:69–81.

DURAND-RICHARD, M.-J. (1996). L'école algébrique anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance. In [*GOLDSTEIN, GRAY, RITTER 1996*], pages 445–477.

— éditeur (2008). *L'analogie dans la demarche scientifique*. l'Harmattan.

DYCK, W. v. (1882). Gruppentheorische studien. *Mathematische Annalen*, 20:1–44.

EHRHARDT, C. (2012). *Itinéraire d'un texte mathématique Itinéraire d'un texte mathématique. Les réélaborations des écrits d'Evariste Galois au XIX*e *siècle*. Hermann.

FENSTER, D. D. et SCHWERMER, J. (2005). A delicate collaboration: Adrian albert and helmut hasse and the principal theorem in division algebras in the early 1930's. *Archive for History of Exact Sciences*, 59: 349–379.

FREI, G. (2007). The unpublished section eight: On the way to function fields over a finite field. *In [Goldstein, Schappacher, Schwermer 2007]*, pages 159–198.

FROBENIUS, G. (1879). Theorie der bilinearen formen mit ganzen coefficienten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 86:147–208.

— (1893). Ueber auflösbare gruppen. *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 337–345.

— (1895). Ueber endliche gruppen. *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 163–194.

— (1902). Ueber gruppen des graders p oder p+1. *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 351–369.

GALOIS, É. (1830a). Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations. *In [Galois 1846, p.395-396]*, volume 13, p. 171–172.

— (1830b). Sur la théorie des nombres. In [*Galois 1846*], p.398-407, volume 13, p. 428–435.

— (1831(?)a). Fragment d'un second Mémoire. Des équations primitives qui sont solubles par radicaux. In [*Galois 1846*], p. 434–444.

— (1831b). Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux. *In* [*Galois 1846*], p. 417–433.

— (1832). Lettre du 29 mai 1832 à Auguste Chevalier. In [*Galois 1846*], p. 408-415, volume septembre, p. 568–576.

— (1846). Œuvres mathématiques. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 11:381–444.

— (1962). *Écrits et mémoires mathématiques*. Gauthier-Villars, Paris.

GIERSTER, J. (1881). Die untergruppen der galois'schen gruppe der modulargleichungen für den fall eines primzahligen transformationsgrades. *Mathematische Annalen*,18: 319–365.

GOLDSTEIN, C. (1999). Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en france (1870- 1914). *Acta historiae rerum necnon technicarum*, 3:187–214.

— (2011). Charles Hermite's Stroll through the Galois fields. *Revue d'histoire des mathématiques*, 17:135–152.

GOLDSTEIN, C., SCHAPPACHER, N. et SCHWERMER, J., éditeurs (2007). *The Shaping of Arithmetics after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*. Springer, Berlin.

Hawkins, T. (1972). Hypercomplex numbers, lie groups, and the creation of group representation theory. *Archive for History of Exact Sciences*, 8:243–87.

— (1977). Weierstrass and the theory of matrices. *Archive for History of Exact Sciences*, 17: 119–163.

— (2008). Frobenius and the symbolical algebra of matrices. *Archive for History of Exact Sciences*, 62: 23–57.

HERMITE, C. (1851). *Sur les fonctions algébriques*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 32: 458–461.

— (1859). *Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré*. Mallet-Bachelier, Paris.

HILBERT, D. (1894). Grundzüge einer theorie des Galois'schen zahlkörpers. *Göttingen Nachrichten*, 224-236.

HÖLDER, O. (1889). Zurückführung einer beliebigen algebraischen gleichung auf eine kette von gleichungen. *Mathematische Annalen*, 34: 26–56.

— (1892). Die einfachen gruppen im ersten und zweiten hundert der ordnungzahlen. *Mathematische Annalen*, 40: 55–88.

— (1893). Die gruppen der ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4. *Mathematische Annalen*, 43: 301–412.

— (1895). Bildung zusammengesetzter gruppen. *Mathematische Annalen*, 46: 321–422.

JORDAN, C. (1860). Sur le nombre des valeurs des fonctions. *Thèses présentées à la Faculté des sciences de Paris par Camille Jordan*, 1re thèse. Mallet-Bachelier, Paris.

— (1864). Mémoire sur les groupes des équations solubles par radicaux. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 58:963–966.

— (1867a). Lettre à M. Liouville sur la résolution algébrique des équations. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 12(2):105–108.

— (1867b). Mémoire sur la résolution algébrique des équations. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 64:269–272, 586–590,1179–1183.

— (1868). Sur la résolution algébrique des équations primitives de degree p^2. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 32(2):111–135.

— (1870). *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Gauthier-Villars, Paris.

KIERNAN, M. (1971). The development of Galois theory from Lagrange to Artin. *Archive for History of Exact Sciences*, 8(1-2): 40–152.

KLEIN, F. (1884). *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. Teubner, Leipzig.

— (1894). *The Evanston Colloquium*. Macmillan and Co, New York and London.

KLEIN, F. et FRICKE, R. (1890). *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, volume 1. B.G. Teubner, Leipzig.

KRONECKER, L. (1853). Ueber die algebraisch auflösbaren gleischungen. *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 365–374.

LE VAVASSEUR, R. (1904). *Quelques considérations sur les groupes d'ordre fini et les groupes finis continus*. Annales de l'université de Lyon and Gauthier-Villars, Lyon and Paris.

LEXIS, éditeur (1893). *Die deutschen Universitäten*. Asher, Berlin.

MAC DUFFEE, C. C. (1933). *The Theory of Matrices*. Chelsea, New-York.

MAILLET, E. (1892). *Thèses présentées à la Faculté des sciences de Paris. Recherches sur les substitutions et en particulier sur les groupes transitifs*. Gauthier-Villars, Paris.

MATHIEU, É. (1860). Mémoire sur le nombre de valeurs que peut acquérir une fonction quand on y permute ses variables de toutes les manières possibles. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 5: 9–42.

— (1861a). Mémoire sur la résolution des équations dont le degré est une puissance d'un nombre premier. *Annali di matematica pura ed applicata*, 4: 113–132.

— (1861b). Mémoire sur l'étude des fonctions de plusieurs quantités, sur la manière de les former et sur les substitutions qui les laissent invariables. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (2) 6: 241–323.

MILLER, G. A. (1898). Report on recent progress in the theory of the groups of a finite order. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2(5): 227–249.

— (1902). Second report on recent progress in the theory of the groups of a finite order. *Bulletin of the American Mathematical Society*, (2) 9: 106–123.

— (1903). Appreciative remarks on the theory of groups. *The American Mathematical Monthly*, 10: 87–89.

— (1907). Third report on recent progress in the theory of the groups of a finite order. *Bulletin of the American Mathematical Society*, (2) 14: 78–91, 124–133.

MOORE, E. H. (1893). A doubly-infinite system of simple groups. *Bulletin of the New York Mathematical Society*, III(3): 73–78.

— (1894). The group of holoedric transformation into itself of a given group. *Bulletin of the American Mathematical Society*, I(3): 61–66.

— (1895). Concerning Jordan's linear groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, II: 33–43.

— (1896). A doubly-infinite system of simple groups. In *Mathematical Papers Read at the International Mathematical Congress Held in Connection with the World's Columbian Exposition*, p. 208–242. Chicago.

— (1897). The decomposition of modular systems of rank *n* in *n* variables. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 10:372–380.

— (1898). An universal invariant for finite groups of linear substitutions: with application in the theory of the canonical form of a linear substitution of finite period. *Mathematische Annalen*, 50: 213–219.

NETTO, E. (1882). *Subtitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra*. Teubner, Leipzig.

NEUMANN, O. (2007). *The Disquisitiones Arithmeticae and the Theory of Equations*. *In* [*GOLDSTEIN, SCHAPPACHER, SCHWERMER, 2007*].

NEUMANN, P. M. (2006). The concept of primitivity in group theory and the second memoir of galois. *Archive for History of Exact Sciences*, 60: 379–429.

NICHOLSON, J. (1993). The development and understanding of the concept of quotient group. *Historia Mathematica*, 20: 68–88.

PARSHALL, K. H. (1985). J. H.M. Wedderburn and the structure theory of algebras. *Archive for History of Exact Sciences*, 32: 223–349.

— (2004). Defining a mathematical research school: the case of algebra at the university of chicago, 1892-1945. *Historia Mathematica*, 31: 263–278.

PARSHALL, K. H. et ROWE, D. E. (1994). *The Emergence of the American Mathematical Research Community (1876–1900): J.J. Sylvester, Felix Klein, and E.H. Moore*. American Mathematical Society, Providence.

PICARD, É. (1890). Notice sur la vie et les travaux de Georges-Henri Halphen. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 110: 490.

— (1896). *Traité d'analyse*, volume III. Gauthier-Villars, Paris.

— (1922). Résumé des travaux mathématiques de Jordan. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 174: 210–211.

PIERPONT, J. (1899-1900). Galois' theory of algebraic equations. *The Annals of Mathematics*, (2) 1-2: 113–143, 22–56.

PUISEUX, V. (1850). Recherches sur les fonctions algébriques. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 15: 365–480.

RADLOFF, I. (2002). Évariste Galois: principles and appications. *Historia Mathematica*, 29: 114–137.

SCHOTTENFELS, I. M. (1899). Two non isomorphic simple groups of the same order 20160. *Annals of Mathematics*, (2)1: 147–152.

SÉGUIER, J.-A. d. (1902). Sur la forme canonique des substitutions linéaires. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 30: 247–252.

— (1904a). Sur les groupes de mathieu. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 137:37–38.

— (1904b). *Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits*. Gauthier-Villars, Paris.

— (1907). Sur la théorie des matrices. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 145: 1259–1260.

— (1908). Sur la théorie des matrices. *Bulletin de la société mathématique de France*, 36: 20–40.

SERRET, J.-A. (1849). *Cours d'algèbre supérieure*. Bachelier, Paris.

— (1859). Sur les fonctions rationnelles linéaires prises suivant un module premier et sur les substitutions auxquelles conduit la considération de ces fonctions. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 48: 178–182.

— (1865). Mémoire sur la théorie des congruences suivant un module premier et suivant une fonction modulaire irréductible. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 61: 973–975.

— (1866). *Cours d'algèbre supérieure*. Gauthier-Villars, Paris, 3e éd. édition.

SILVESTRI, R. (1979). Simple groups of finite order in the nineteenth century. *Archive for History of Exact Sciences*, 20: 313–356.

TURNER, L. E. (2012). The Mittag-Leffler theorem: The origin, evolution and reception of a mathematical result, 1876–1884. *Historia Mathematica*.

VOGT, H. (1895). *Leçons sur la résolution algébrique des équations*. Nony, Paris.

WAERDEN, Bartel, v. d. (1985). *A history of Algebra : from Al-Khwàrizmi to Emmy Noether*. Springer Verlag, New York.

WEBER, H. (1893). Die allgemeinen grundlagen der galois'schen gleichungstheorie. *Mathematische Annalen*, 43:521–549.

— (1895-1896). *Lehrbuch der Algebra*, volume 2 vols. F. Vieweg und Sohn,, Braunschweig.

WIMAN, A. (1900). Endlich gruppen linearer substitutionen. In *Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften*, volume I, chapitre art. IB3 f, p. 522–554. Teubner, Leipzig.

ON A POSSIBLE CONTRIBUTION OF TRANSFINITE MATHEMATICS TOWARDS EURHYTHMY

Gildo MAGALHÃES
University of São Paulo

Knowledge never achieves completion. Any system of theories, however excellent, ends by generating anomalies and paradoxes. This statement is valid for philosophical systems, scientific theories or other forms of investigative knowledge. If one takes, say, the history of physics, there are many examples to illustrate the point, such as the Ptolemaic geocentric system, or Newton's mechanics, or the orthodox quantum theory. There is no methodology to create axioms and rules that remain forever valid, therefore it is capital that the history of science be concerned with controversies that surround this knowledge, including the socio-cultural environment where these axioms originated. From the epistemological viewpoint, it is useful to exploit how the reactions to the controversies were, how they were judged at the time when different hypotheses, theories and experiments arose – as well as how they are historically and scientifically evaluated in the present.

On the other hand, nature does not function arbitrarily, rather it is open to our rationality, and it is precisely this feature that allows us to know it, in better and better approximations. That nature is not arbitrary can be demonstrated also in modern mathematical applications, such as the theory of chaos: natural processes which are seemingly random, in a vast number of cases show themselves to possess a hidden regularity, which was inaccessible at first view. It is thus reasonable to assume that there is always progress in knowledge, even though we face the contingency of creating new theories from time to time. There is also an attenuating factor in this process of transformation of the scientific body: even if dogmas from the prevailing scientific canon are changed, usually a new theory accepts as a valid limit case the old theory. So, there is no abrupt revolution in the short term, but gradual reforms. Even though many philosophers of science maintain that no comparison is possible between paradigms that are incommensurable, it is doubtful whether the two systems really do not converse with each other. Old and new controversies will intermingle and contribute towards an epistemological deepening and mutual better understanding.

The above considerations hinge on our disagreement with the opposition, sometimes in radical tones, between realism and idealism, when the latter term is taken as synonymous of Plato's concept of ideas. One can say that every theory intended to explain the world is, in principle, a model, *i.e.* a representation of reality. Model building allows some forecasts, when the model is really good; historically speaking, explanatory models replace each other, but as noted above, in general something is retained out of the preceding models, originating a succession of more or less entangled models, permeating the advancement of knowledge. In the so-called Platonic world of ideas, the truth exists as well as the true idea – we may have limited access to this true world, while our models somehow probe such truth, though always in an incomplete way. In the well-known myth of the cave, Plato exploits the approximate discovery of the true idea, and his allegory adjusts well to even the most realist theories – always in a provisory form – that science adopts.

From this vantage point, we add our opinion that the history of the sciences has quite often corroborated that, in particular, mathematics is rooted in the activities of observing and interpreting reality. Accordingly, mathematics somehow does discover what already exists in the universe, even when theories are apparently invented out of the blue. Although the mathematical science has and fully uses freedom to propose hypotheses and axioms, possibly more independently than in other sciences, it is remarkable that even those theories that appear to be most abstract and devoid of experience, sooner or later they end up as practical applications in natural sciences like physics, chemistry, biology or other forms of knowledge.

We will then here advance some reflections involving on one hand the recent proposals relative to eurhythmy made by the Lisbon Group [Croca: 2010], and on the other hand a topic which has already stirred much horror among the mathematicians: the discoveries about infinity by Georg Cantor (1845 – 1918). What is to be investigated is whether also in the case of infinities, there can be some application to this newborn theory of physics. We shall proceed very carefully, since we do not have sufficient elements to make it operational.

Initially we recall that Cantor in his 1883 *Grundlagen* (*Foundations of a general theory of manifolds,* Note to Section 1) justifies his resource to different infinities by quoting Plato's dialogue *Philebus or the Highest Good.* There is in this dialogue an interesting passage (16 b,c,d) that bears upon our subject; let us hear Plato speak though Socrates:

> *... there is not, and cannot be, a more attractive method than that to which I have always been devoted, though often in the past it has eluded me so that I was left desolate and helpless…It is a method quite easy to indicate, but very far from easy to employ. It is indeed the instrument through which every discovery ever made in the sphere of the arts and sciences has been brought to light…The men of old, who were better than ourselves and dwelt nearer the gods, passed on this gift in the form of a saying. All things, so it ran, that are ever said to be consist of a one and a many, and have in their nature a conjunction of limitedness and unlimitedness.*

The elaboration of this thought in number theory was Cantorian mathematics' main contribution to science. The departure point that enabled Cantor to arrive at the transfinite, besides the already-mentioned Platonic inspiration, seems to have been St. Augustine, who in *The City of God* (Book 12, chap. 19) characterized the whole series of integer numbers as a real infinity, and not just a potential, or virtual one, as demanded by ancient philosophy, especially Aristotelianism.

Georg Cantor studied philosophy in Zurich, and then mathematics with Karl Weierstrass (1815 –1897) in Berlin, where he finished his doctorate in 1867. Until 1878 his works dealt with classical mathematics, and after that, he worked on the theory of infinite numbers. His original results led him to be severely attacked by orthodox mathematicians orchestrated by his great personal enemy, Leopold Kronecker (1821 – 1897), who defamed him and kept him from being published in prestigious mathematics journals, as well as tried by all means that he failed to get a university chair. Cantor's isolation due to such persecution plunged him in periods of depression, paranoia and nervous breakdown, but which he was initially able to overcome, going back to writing his major work, *Contributions to the founding of a theory of transfinite numbers* (1895 – 1897). Afterwards he suffered again several other mental crises, and ended up interned in a psychiatric hospital, where he died. Recognition of his work was late, and it still suffers attacks today – even though the famous mathematician David Hilbert (1862 – 1943) stated (1926) that "no one can drive us out of the Paradise created for us by Cantor".

Cantor calls a set (German "Mannigfaltigkeit", or "manifold", multiplicity) everything that is complete and determinate, even if infinite. A set constitutes a collection of objects of sensation, intuition or thought, and for him such a collection is related to the Platonic "idea". Besides finding inspiration in Plato, and in the philosopher and theologian Augustine, he carefully studied Thomas Aquinas and Nicholas of Cusa, besides Giordano Bruno, who all also reflected on the matter of infinity. Basically, in his intellectual journey he took sides against Aristotle, for whom real infinity does not exist, since everything perceived by us is finite and limited, and from our limited sense perception derives the mind's finitude.

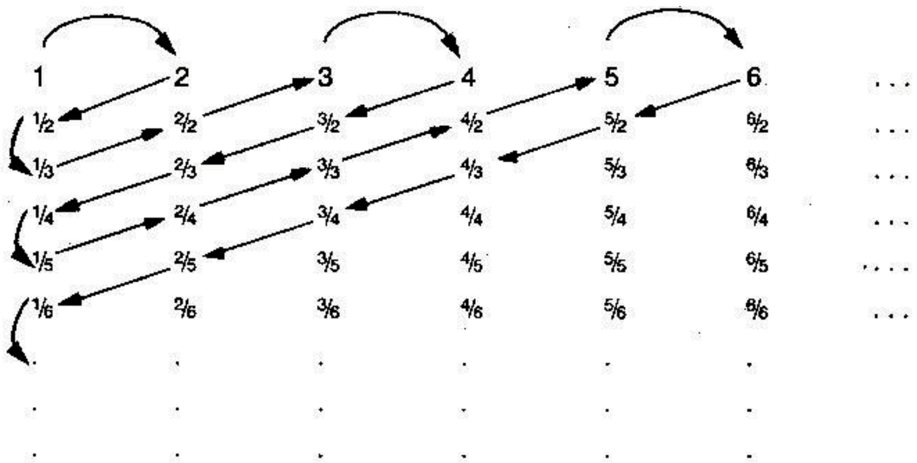
We know that in physics something as a light wave is not really infinite in time or space, though considering it as infinite might help disclose its approximate behavior, an approximation which is useful under certain circumstances. Indeed, only recently, by substituting the infinite waves which have been used since the 19th century in Fourier's analysis by finite wavelets, as did the leader of Lisbon Group, José Croca, it was possible to create a truly causal theory for quantum phenomena which has revealed itself consistent. Are there infinite systems in our common practice? Even if we object to this on physical grounds, adopting the Aristotelian standpoint which admits of the sense limits imposed on space and time, we have not yet been able to verify whether real space is infinite or not, we can at most admit that "infinite" may stand for an approximation of an unreachable space finitude.

The same discomfort with infinities revealed in physics praxis has surrounded mathematical thought. Reformulating the question, mathematically speaking, is there a contradiction in assuming infinite sets to exist? Conceptually, the answer is negative: at least for Cantor and his adepts, we are entitled to consider infinities as an exact mathematical description. Richard Dedekind (1831 – 1916), Cantor's close friend and correspondent, defined (*Essays on number theory,* 1888) as infinite the system which is similar to a part of itself, and then proved that there exist infinite systems by using the set S made up of the totality of things that can be object of his own thoughts. If *s* is an element of S, then the new thought *s'* that *s* can be an object of thought is itself an element of S. If we regard this as a transform $\Phi(s)$ of the element *s,* the transformation Φ has the property that the transform is part of S; certainly S' is part of S, there are elements in S (e.g. the own ego) which are different from such thought *s'*, and therefore are not contained in S'.

The capacity of thought to think itself was used by Cantor in his second major publication on the transfinite, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers* (1895 – 1897). In this one, he started with the set of natural numbers 1, 2, 3, 4…, which can be put in a one-to-one (biunivocal) relationship with the set of even numbers 2, 4, 6, 8…, even though the latter is contained in the former. Sets will be "equivalent" whenever one of them or part of it is thus related to the whole of the other set. This property is in turn connected with the linearization of the counting process, for a linear whole contains its parts, yet the attempt to linearize infinite sets confronts us with a paradox: the whole is equivalent to its parts, and this is the property that defines an infinite set, or as Cantor called it, a transfinite. Linearization can extend, therefore, the properties of a set until infinity, but in a fixed mode, which does not change the process in itself.

Incidentally, these properties of linearization reappeared more recently when the fractal theory originated in mathematics: through Mandelbrot sets geometrical figures are generated, so that when these are enlarged they are seen to reproduce the initial configuration. These fractals are also infinite sets, and they verify the statement that the whole is equivalent to a part of it. Once more mathematics and reality are combined, since fractals are the best description for a series of physical processes: the anatomy of biological networks, such as plant vessels or the nervous system; the geographical profile of the sea coastal zones; and many other practical applications.

In a letter (1885), Cantor says that the series 1, 2, 3... is a variable magnitude, which may increase without limits – it is a potential infinity. He then defined the "power" (Mächtigkeit), or "cardinality", of a set as a number that denotes a transformation measure: how many orders of abstraction differentiate a given set from another one. This was the consequence of Cantor's perception that the infinite natural numbers could be arranged in a one-to-one relation, not only with the infinite even or odd numbers, but also with the infinite fractions (rational numbers), containing integers both in the numerator and denominator. His reasoning was according to the following figure:



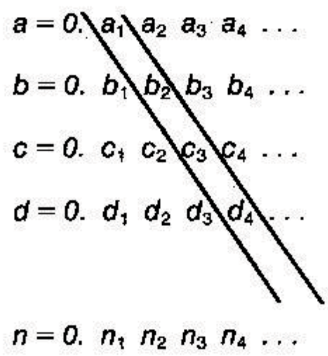
The demonstration by Cantor that infinite sets of rational numbers are countable and have the same power as the natural numbers is ingenious: in the preceding figure fractions are arranged in a matrix, such that the first1 line has all fractions n/1 (n are the natural numbers). The second line has all fractions n/2, the third one n/3, and so successively. A diagonalization process is then applied, starting with fraction 1/1, then going to 1/2, 1/3, 2/2, 3/1, etc. In the n-th step "n" elements have been picked, so that all possible fractions will be included. The result obtained is a one-to-one correspondence among the natural numbers of the first line and all possible existing fractions, which are therefore countable, even though there is an infinite number of them, as between 1 and 2, for example. There is also a one-to-one correspondence between the set of natural (or countable) numbers and many others, as the set of all square numbers, or also the set of all prime numbers.

However, since Ancient Greece we have known that there are numbers such as the square root of 2, which cannot be expressed by fractions, the so-called irrational numbers. Cantor was surprised to discover that the algebraic irrational numbers, i.e. those that can be constructed with ruler and compass (as √2, which can be constructed as the diagonal of a square whose side is equal to 1), though there is an infinite number of them, could also be put in a one-to-one correspondence with natural numbers. Cantor called all these different types of numbers "countable", pointing out that they all have the same generative principle, i.e. the same power: they can all be linearly ordered, and correspond to definite points on a line, where they can be counted using the sequence of natural numbers.

The sets of numbers described so far make the line be infinitely dense. However, there are "gaps", since we left out the transcendental, or non-algebraic, numbers such as π, the ratio between the circumference and its diameter. That was the key for Cantor to realize that there is more than one type (or power) of transfinite set. As in the case of √2, the number π cannot be expressed as a fraction, but more importantly, it cannot be constructed with ruler and compass, what would be possible if it could be defined through an equation similar to the one that defines the diagonal of a square; π can be given as the sum of an infinite series, which is in practice an approximation, but not an exact expression, thus it cannot be physically constructed. Therefore π is irreducible, it is something primitive and given, and though it is a very concrete relation between two values, the circumference and its diameter, it can be only idealized in the Platonic sense.

Taking into account the transcendental numbers, the infinity of countable numbers is not any more sufficient to hold the new set. The power of a set of real numbers, including the transcendental ones, is greater than the power of countable numbers, and so Cantor called the first one "non-countable". The first infinity is countable and has a cardinal number he called $\aleph_0$ (aleph-0), while the second infinity is non countable, with a cardinality of $\aleph_1$ (aleph -1).

To demonstrate that real numbers are non-countable, Cantor used a different process of diagonalization, as in the following figure:



The demonstration that the real number set has a higher power is through *reductio ad absurdum,* by admitting there is a way to order them (*i.e.* to put them in a one-to-one correspondence with countable numbers), such as in the figure above. Cantor chose to represent real numbers as an infinite series of decimals, periodic or not. Any real number is thus expressed with an integer part, followed by decimals – for example, 2 = 2.000000...; π = 3.141592...; $\sqrt{2}$ = 1.414286... in the figure we suppose that the infinite list contains in principle all real numbers (to simplify, the integer part was chosen as zero). The new diagonalization devised by Cantor is intended to construct a new number, starting with the integer part. For a new first decimal, one chooses any digit different from a_1; for the second one, any digit different from b_2; and so on. The new number is indeed different from any other in the infinite list: it is altogether different from the first one because its first decimal is different; it is also different from the second one in the list, etc. If the new number is added onto the original list, we apply the same procedure and create a newer number, which is not present in the modified list. This means that there is no counting process that passes through all real numbers, contrary to the initial supposition.

It is surprising that the power of the set of points on so dense a line associated to the real numbers is the same as any subset of the line, as for example in the interval from zero to one. It is also equal to the power of points in any dimension, as in the unit area or unit volume. The process of formation of non-countable infinities is thus non linear.

Extending his reasoning beyond these concepts, Cantor concluded that it is possible to create a transfinite number next to aleph-one, i.e. aleph-two, and in fact transfinite such numbers, so that there is no transfinite greater than all others. Each one will be non-countable and characterized by a power; as seen before, integers, rational and irrational numbers have a power equal to zero, and the real numbers a power equal to one. For successively greater transfinite numbers, such that A<B<C..., Cantor demonstrated that $2^A = B$, $2^B = C$, etc

The cardinality is associated to the size of a set, that is, the number of elements it contains. The arithmetic of transfinite cardinal numbers follows some rules which are different from those of finite numbers, such as:

i) If a,b are cardinals, with $b \geq a$, and at least one of them (b) is infinite, then $a + b = b + a = a \times b = b \times a = b$.

ii) $a < 2^a$, a being finite or infinite.

For Cantor what matters is the generating principle of the new number classes, and each one cannot be generated from a simple linear increase of the preceding series, contrary to how we can, say, form an integer greater than any other one, just by adding one unit, i.e. through counting.

There is still an unsolved problem in the history of transfinite numbers: the continuum – the set C of all real numbers is part of aleph-one, or is it exactly equal to aleph-one? As stated before, by mapping real numbers onto an infinitely long line, one can demonstrate that the set of these numbers contains as many elements as there are in a segment of the line. This makes any line section infinitely dense and with no gaps: between any two real numbers, there is an infinity (of cardinality aleph-one) of real numbers. It is exactly the presence of the transcendental numbers which fills up the gaps. The "continuum hypothesis" is that the real number set has a cardinality of aleph-one, as Cantor sustained a number of times, but there is no proof of that. In 1938, Kurt Gödel (1906 – 78) proved that it was not possible to demonstrate the falsehood of the continuum hypothesis, and 25 years later Paul Cohen (1934 – 2007) proved also the reciprocal, i.e. it cannot be demonstrated to be true by using the axioms of set theory. Cohen still conjectured (*Set theory and the continuum hypothesis*, 1966) that the continuum would in fact be much denser, and would have a cardinality greater than any aleph, its generation being a totally different process than generally assumed – but that remains an open question.

Besides what has already been presented, Cantor worked with the concept of ordinality. A set has an ordinal number which corresponds to the position this set occupies in a list whose first position is that of the sets with just one element, the second position is that of the sets with two elements, and so forth. In the case of finite sets, cardinality and ordinality coincide. For infinite sets, their cardinal does not coincide with the ordinal, and there are infinite distinct ordinals (positions) for the same cardinal.

A new arithmetic for transfinite ordinal numbers arises then, with peculiar commutative, associative, and distributive properties, such as:

- $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$; $\alpha.\beta \neq \beta.\alpha$
- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, $(\alpha.\beta).\gamma = \alpha.(\beta.\gamma)$
- $\alpha.(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma$

If ω designates the ordinal number associated to the cardinal aleph-zero (countable numbers), one can demonstrate that $\omega + \omega = \omega$, and also $\omega.\ \omega = \omega$.

About the ancient "problem of the one and the many", Cantor wrote to his friend Richard Dedekind about a contradiction if the multiple set is considered a member of the original "one" set. It is the famous paradox identified by Cantor himself, and later by the end of the 19th century discussed by the mathematician Cesare Burali-Forti (1861 – 1931), better known in the following version under the name of [Bertrand] Russel´s (1872 – 1970) antinomy: the barber of a village where no man shaves himself, and where every man is shaved only by this barber, can he shave himself? This reminds of the type of contradiction that arises of statements like: "this sentence is false". That is not, however, what Cantor considers valid in his formulation of set theory, for him this mental trap can be avoided by considering that a multiplicity, even when infinite, must be thought of as something wholly new and different from its countable elements, and can only be thus adequately conceived.

The very human mind, or world of thoughts (*Gedankenwelt*), was the object of a mathematical demonstration offered to Cantor by Dedekind, who considered such a set as an infinite multiplicity (manifold) with all infinite alephs that could be conceived. This point is extremely important: human mind, in spite of its biological limitations - along the line pointed out by Aristotle in relation to potential infinity – has an infinite possibility to form new classes of transfinite numbers with ordered growing powers. This mental exercise is key to mathematically formulating human creativity, which manifests itself in all areas of knowledge, including artistic creation. Aleph-zero would then be a first "mode of thinking", whereas aleph-one is a "mode of thinking the mode of thinking". It is as if each transfinite were a quantum, or a monad: it is a unity that may have parts, but it behaves as a new being, which is more than the sum of its parts - it is not linearly reducible.

In the context that Cantor discussed these notions there was also a theological problem, which defied his religious faith, although he was not affiliated to any church. Contrary to what may be thought nowadays, when it is common to push religious considerations entirely out of the scientific practice, it was exactly theology that helped Cantor solve some formal problems of transfinite mathematics. For him, it became clear that the transfinite of real numbers is a creation belonging to this world and can be intelligible to mankind, whereas an "absolute infinity" lies in Plato's world of ideas, or is, theologically speaking, God's uncreated and exclusive attribute. This led him to admit that man can face real infinities, and thus the unity of the multiple, without contradicting himself – a multiplicity is consistent with a "set" provided of its own individuality. This power to be himself a creator allows man to solve problems by further creating new problems. If there were no problems to solve, neither inconsistencies that arise out of them, man would have no need for creativity, all of which is pertinent to the world of thoughts, as Cantor and Dedekind perceived.

The above theological argument has an important mathematical and scientific implication: there can be no complete axiomatic system, since sooner or later new axioms have to be created to solve the ensuing paradoxes of incompleteness. Such a feature fully agrees with reality, as a careful study of the history of physics shows, or moreover the history of any science demonstrates. Truth becomes a pathway to be uncovered and followed, not a final goal: the ultimate transfinite is not within the human reach, the absolute infinity can only be intuited but never attained. The ultimate truth is not human, it belongs to the absolute – whether it is a "God" as Cantor believed, or the universe itself, in a natural version. This is the trail of advancement of knowledge, which keeps us from embracing nothingness, the empty – as novelist Michael Ende well characterized in his fable (for children and adults alike) *The endless story*, where he portrays how the worst threat for mankind would be the loss of creativity, leading into the advancement of nothingness – the destruction of fantasy entails the substitution of the universe for a non-universe.

The attempts to transform the whole of mathematics in just logic and symbolism, divorced from reality, received an impulse with the formalization undertaken by Bertrand Russell and Alfred Whitehead at the beginning of the 20th century, in their work *Principia Mathematica.* The mathematician Kurt Gödel (1906 – 1978) counterattacked this philosophical trend at the beginning of the 1930s, when he published his essay "On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems". He demonstrated therein that any formal system, to be free of contradiction (or "consistent") must be incomplete, i.e. open to the generation of new laws and axioms. In 1964, Gödel expanded that initial scope to oppose Alan Turing's (1912 –

1954) work on cybernatics, including his pretension to build "artificial intelligence" through a computer.

The general definition of algorithm advanced by Turing is well known. It is associated with the so-called "Turing machine" (1936), a sequential device which processes a few simple operations in a recursive way (implying a "mechanical", countable process), just like the future digital computers would do. However, using a Turing machine is feasible exactly only for countable procedures, which accept a precise and closed definition to establish a calculation, an algorithm. When it is applied to problems such as, for example, defining real transcendental numbers, the machine eventually does not know whether to stop or not its processing, for there is no algorithm to define such numbers, or any non-countable infinity. The validation of the calculation in this case must be accomplished through external means, as Gödel demonstrated, based on Cantor's previous work.

In other words, what distinguishes the functioning of the human mind from any computer language is that we are open to accept contradictions in the form of ambiguities, anomalies, paradoxes, metaphors, etc, which we solve and incorporate, whereas formal systems are closed and exclude such contradictions and inconsistencies, under the risk of not being able to proceed – and any additional attempt to provide a rule for the computer to deal with ambiguities will be short-lived, as it will stop again at a further contradiction.

As a matter of fact, the advancement of knowledge, which is more readily verified in the case of natural sciences, has been possible through the constant intrusion of anomalies, as shown in the history of science. Such anomalies are like non-linearities in a process which up to a certain point is well conducted and well described by a linear approximation. Though this approximation can be quite useful within certain conditions, it may however reveal itself fallacious when extended beyond those limits. The non-linear may even be linearized and provide satisfactory answers, yet one must be ready at some point to meet paradoxes derived from the adopted approximation.

A new question arises: if the very human mind works with discontinuities (quanta) in the process of creation, do the natural processes in the universe we inhabit also share the essence of distinct parts, which in the end form transfinite sets? For Cantor the answer was undoubtedly yes, both the continuous and discontinuous, the transfinite and the finite are two aspects of a unitary whole, to which we also belong. To exemplify the matter, would the so-called "space-time continuum", as popularized by the relativity theory, be a "stratified" continuum, yet a non-linear one? If it were so, in hyperphysis when dealing in space-time with the subquantum level, would the substrate allow for linearization, and appear like some traditional substrate, as reality often seems to be linear in a larger scale?

The answer will not be a simple one. Linearization is, at most, a particular case, and it is liable to introduce distortions, which can be more or less relevant. Even in the mathematical domain, this is an interesting possibility, when one considers for example the class of functions that Karl Weierstrass (1815 – 1897) demonstrated to exist: continuous functions which are nowhere differentiable. Such a function cannot be linearized, not even in an infinitely small neighborhood of any of its points. The property of being continuous and non differentiable occurs when the function's graph shows edges or when it leaps, or also if it neither converges nor is defined. How does this impact on physical processes at the subquantum level?

Very peculiar properties of the subquantum medium were assumed as hypotheses in hyperphysis. The stronger hypothesis is that, consonant with the principle of eurhythmy, the organization of the subquantum medium that we call an akron (e.g. an electron) has a kind of sensory, its "theta wave" (or "empty wave"), with which the akron "feels" its external world. This would be a special type of sensor, whereby the eurhythmy property causes the akron to move along the direction where the intensity of the theta wave is greater, to preserve its existence, which is in turn what directly or indirectly we can observe. In spite of its peculiar appearance and the "sensor" metaphor, which could be considered Aristotelian and more appropriate for biology than physics, the principle of eurhythmy was able to be successfully applied to explain well-known natural phenomena, such as the principle of Fermat (minimum time for light propagation in different media), and Snell's law for light refraction, or more generally the principle of least action (Maupertuis and others), all resulting from the greater efficiency and harmony associated with the cited eurhythmical property.

In the hyperphysis associated with akrons and theta waves, the akron is "generated" or "emerges" out of the subquantum medium, and besides possessing an infinitely larger intensity, it has a longer mean lifetime, compared to its theta wave. Moving at its own velocity, the akron's mother-wave tends to disappear, returning the wave's energy to the subquantum medium. For the theta wave to persist, it must be regularly "revisited" by the akron (the "visitation hypothesis"), or else the akron is decoupled from its mother-wave and will generate new theta waves as it moves along. The akron supposedly does not lose energy when moving, and it behaves as an infinite energy reservoir, capable of generating an infinity of theta waves. To derive the expression for the intensity of the theta wave as "seen" by an akron, it is assumed that if it meets another theta wave whose intensity is much greater than its mother-wave, it will "feel" just the energy of the stronger wave. Reciprocally, if the mother-wave is stronger, it will continue following the mother- wave.

In an analogous manner one could suppose that a function describing the internal structure of an akron at the subquantum level should not be linearizable below a certain minimum distance from it, i.e. non-linearity becomes an indicative of the existence of internal structures, which may also explain its movement in the substratum. The energy of the pair is practically concentrated in the akron, but it is the theta wave that guides it, its energy is relatively insignificant (an estimate is that it is 10^{-54} times smaller). How can such small energy, distributed in an undulatory manner, help guide the akron to where its intensity is a maximum, unless there is an internal structure to the akron?

We do not possess a physical answer in the model for the question, but a formal way of putting it would be to ascribe to the akron the mathematical property of infinite cardinality, letting the akron be associated with some aleph, so that its energy content follows the infinite composition of transfinite intensities. Of course, we do not intend anything but an approximate description for certain subquantum conditions, where for the akron's intensity we would have something like $\aleph + \aleph = \aleph$. This all being just conjectures, we may as well suppose that the interactions among akrons also follow transfinite arithmetic, using either cardinal or ordinal numbers. Also for any theta wave, it may be considered as composed by a mother theta wave and other theta waves, forming a packet of wavelets.

How can we describe the resultant of several theta waves and their akrons that interact mutually, given that each interaction is in itself non linear? The mathematical difficulty that hyperphysis has encountered first led to a prudent traditional solution, which is the return to linear approximation, thereby acknowledging that the validity of the result is a limited one. In this way several hypotheses to determine the akron's velocity were studied, by varying the intensity of the theta wave from which the akron emerges, the type of medium, and its initial velocity. Maybe by using transfinite mathematics one could obtain an applicable tool, with the advantage that it would not have the philosophical flaws that linear approximations carry, and considering some similarities in non-linearity between Cantor's theory and the properties of hyperphysis. In particular, if the akron has an infinite intensity a and the theta wave a finite intensity b, we obtain $a + b = b + a = a.b = b.a = a$.

It is as if we said that the principle of eurhythmy is a manifestation of a kind of interaction resulting of infinite intensities, which lead to the predominance of new infinities. Though the description provided is only barely qualitative, the reasons for the parallel between transfinite mathematics and hyperphysis phenomena are due to considerations like those recapitulated below:

- Real infinity is something constant, it does not change by addition or subtraction of set elements, or to say it in different words, the whole is similar to a part of itself. By reproducing its parts, the whole is equivalent to its parts, and this property defines what an infinite set is. Likewise, the set formed by at least an akron and its theta wave seems to display a similar property.
- Linearization may infinitely extend properties of a countable set, but it does so in a fixed manner which does not alter the process itself. On the other hand, the process of infinity formation is a non linear one. Each transfinite is a unit, even if it has parts, it behaves as a new being which is more than just the sum of its parts. In a totally general way, nature does not seem fit for an exact linearization of its processes, which fact becomes evident when a linear description of a phenomenon breaks down at a certain point. This is exactly the case of quantum physics, where linearization is intimately coupled with a non causal description of phenomena.
- What is supposed to happen in the vicinity of an akron at the subquantum level has some analogy with the behavior of continuous functions which are neither nowhere differentiable nor linearizable in an arbitrarily small neighborhood.

Finally we should note that hyperphysis faces at one point the same problem that has confronted quantum theories up to now, that is, how to deal with infinite values which probably are a result of ignoring the internal structure of entities. For example, in classic theory when one considers the electron radius to be practically zero, then its self-energy tends to infinity – as in the case of several other entities that are approximately considered as "point particles". To cope with this problem, quantum theory introduced the renormalization concept, which corresponds grossly to subtract an infinite value from another infinite one, under certain conditions, leaving a finite result.

The infinite values might however have a different meaning, one that we don't know yet how to interpret. A first clue is that infinities may indicate that the adopted approximation of the model is no more usable, i.e. we have reached a scale where a significant action of an internal structure comes into play. If we insist on ignoring the structure, we will meet with infinite values, and knowledge will only advance when there is courage enough to pursue that internal morphology. The proposal advanced in 1985 by Winston Bostick (1916 - 1991) for a "chayah" (Hebraic for "living") still deserves to be remembered. Such "living" electron has a filamentary structure akin to the fusion plasma vortices, both those produced in laboratories and the natural ones observed in stars. It is possible that at such scale there is enormous energy liberation – similar to what nuclear energy represented in the past when one still assumed the nucleus to have a structure of only protons and neutrons, and conversion of matter into energy in the processes of nuclear fission and fusion showed energy levels much above those known at the time. Analogously the subquantum medium structure may show unsuspected energy magnitudes.

Secondly, from the formal point of view, the mathematics now used in the renormalization procedure may not be adequate, as it may falsify the behavior of functions whose value is so great that we consider them to be infinite. Conceptually, we may be doing something equivalent to a false infinity statement, such as $\omega - \omega = 0$ (or some other finite value), instead of $\omega - \omega = \omega$, i.e. renormalization may falsely avoid unavoidable infinities, which are ultimately evidenced. Renormalization would then be no more than the reintroduction of linearity in a process where the infinities are there to emphasize the non-linearity of a phenomenon. Will hyperphysis avoid this procedure?

We leave these questions in the air, as they result from some still very hypothetical thoughts, to those willing to work with hyperphysis and eurhythmy, and not satisfied with the mathematical foundations for this work.

BIBLIOGRAPHY

AUGUSTINE, St. *City of God.* New York: Image Books, 1958.

BOSTICK, Winston. “The morphology of the electron”. *International Journal of Fusion Energy.* Vol. 3, nº 1, January 1985, p. 9-52.

CANTOR, Georg. “Foundations of a general theory of manifolds”. (Orig. 1883) *Campaigner,* vol. 9, nº 1-2, January-February 1976, p. 69-97.

— *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. (Orig. 1895 e 1897). New York: Dover, 1955.

CHAITKIN, Gabriele (transl.). “Correspondence of Georg Cantor and J.B. Cardinal Franzelin”. *Fidelio,* vol. III, nº 3, Fall 1994, p. 97-116.

CROCA, José. “Hyperphysys – the unification of physics”, in J.R. Croca and J.E.F. Araújo (eds.), *A new vision on physis.* Lisboa: FCT/CFCUL: 2010.

ENDE, Michael. *A história sem fim.* São Paulo: Martins Fontes/Editorial Presença, 1990.

DUNHAM, William. *Journey through genius. The great theorems of mathematics*. New York: Penguin, 1991

FUCHS, Walter. *Matemática moderna.* São Paulo: Polígono, 1970.

MESCHKOWSKI, Herbert. *Problemgeschichte der neueren Mathematik (1800-1950).* Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut, 1978.

PAOLI, Dino de. “A refutation of artificial intelligence”. *21st Century,* vol. 4, nº 2, Summer 1991, p. 36-54.

— “Mathematics and the paradoxical in nature”. *21st Century,* vol. 10, nº 2, Summer 1997, p. 22-35.

PARPART, Uwe. “The concept of the transfinite”. *Campaigner,* vol. 9, nº 1-2, Jamuary-February 1976, p. 6-68.

PENROSE, Roger. *The emperor’s new mind. Concerning computers, minds and the laws of physics*. London: Vintage, 1989.

PLATO. *Philebus.* Translated by R. Hackforth *in* E. Hamilton and H. Cairns (Eds.). *The collected dialogues of Plato.* Princeton: Princeton University Press, 1980.

RUCKER, Rudi. *Infinity and the mind. The science and philosophy of the infinite*. London: Penguin, 1997.

SANCHEZ, Antonio Leon. "Sobre la aritmética transfinita de Cantor", in www.interciencia.es (accessed on July 1, 2011).