Um estudo de Equações Diferenciais

Eduardo Rodrigues Della Noce

Sumário

Motivação

Como sequer começar? As equações diferenciais talvez sejam a aplicação mais importante do cálculo. De uma forma geral, durante o modelamento seu sistema, é possível que você vai chegar numa equação que envolve uma função que você quer descobrir e suas derivadas. Isso é muito frequente em engenharia! Aqui, quero passar uma intuição para você saber quando vai cair numa situação dessa, e também os métodos de conseguir suas desejadas soluções. Os métodos são a “receita” que você precisa para pegar esses “ingredientes” que você encontrou (a equação, condições iniciais e de contorno, entre outros) e transformá-los em um “bolo” (achar a função que você procura para resolver seu problema).

Os exemplos de aplicações são dos mais diversos, então vamos começar a verificá-los.

Como identificar equações diferenciais em um problema? Alguns exemplos de aplicações

Estamos muito acostumados a modelar nossos problemas com a álgebra comum; temos aqueles problemas bem clássicos de fazendas, de probabilidade, os vários tipos de problema que já vimos ao longo de nossas vidas. Sempre que temos que solucioná-los, chamamos algo de x, e vamos trabalhando as informações até chegarmos em equações que sabemos resolver. Equações diferenciais não serão diferentes disso, mas vamos tratar nossos problemas não com um x^n mais, mas com um $\frac{d^n f}{dx^n}$. Isso mesmo, passaremos a modelar nossos problemas com diferenciais, e não mais simples variáveis, porque agora não nos interessaram mais pontos, e sim funções. Quando resolvemos equações algébricas, achamos números. Quando resolvemos equações diferenciais, achamos funções. Ou seja, uma equação diferencial é qualquer equação que contenha uma função a ser achada e relacione as derivadas dela com alguma coisa.

O jeito mais simples de pegar o jeito de como farejá-las e ver como elas podem aparecer em nossos problemas é pegando alguns exemplos.

O modelo populacional, o primeiro instituído, pensava que a variação de uma população é diretamente proporcional a população atual. Faz sentido, quanto mais pessoas, mais reprodução. Portanto, a variação das pessoas no tempo depende da quantidade de pessoas no tempo.

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Portanto, percebe-se que já um caso tão simples já é uma equação diferencial. Veja que não sabemos qual é essa função P ainda, que no final é o que nos interessa, pois só sabemos essa propriedade que ela demonstra: o quanto a população irá variar em um dado momento depende da população no mesmo momento considerado. Poderíamos sofisticar: sabemos que se não houver recursos suficientes, a população vê um limite de crescimento.

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{R}\right)$$

Onde R é a população máxima, devido a fatores como recursos e outros. Se $R \gg P$, ou seja, se tiver uma população muito longe do limite, perceba que a parcela direita se torna 1, esse fator não tem interferência, tendo desenvolvimento sem dificuldades nem disputas, voltando a equação que tínhamos antes. Ao mesmo tempo, quanto mais próximo de R estiver P, menos a população evolui, pois esta chegando perto do limite, e a parcela direita se aproxima de 0. Se $P > R$, o termo fica negativo e a variação de população é negativa. Faz muito sentido. E poderíamos considerar ainda mais fatores, e montar equações diferenciais de população cada vez mais sofisticadas. Resolvendo essas equações, podemos dizer a população a qualquer tempo que se deseje, passado, presente ou futuro.

Newton montou sua própria equação diferencial de mudança de temperatura em corpos, que até hoje leva seu nome, ou também leva o nome de Equação do Morto. Essa equação diferencial dita que a variação de temperatura de um corpo que esteja em um ambiente é proporcional a diferença de temperatura dos dois. É algo bem claro, quando a diferença está muito grande, o corpo esfria/esquenta muito rápido; quando a diferença esta pequena, a variação de temperatura também é baixa. Portanto

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A)$$

Onde T_A é a temperatura ambiente, e k é uma constante negativa (note que se $T > T_A$, espero que $\frac{dT}{dt} < 0$ e vice-versa, e por isso k é negativo. Não é possível o corpo estar mais quente que o ambiente e continuar tendo sua temperatura aumentando no tempo, por exemplo). Perceba que esse problema tem a característica de sempre a variação ser proporcional ao instante atual: $\frac{dT}{dt}$

está em função de T atual, de forma continua, como é de se esperar. Não faria muito sentido a taxa de variação de temperatura depender da temperatura de 20 anos atrás, o que importa é o agora. Se resolvermos essa equação diferencial, teremos a função temperatura, e seremos capazes de dizer a temperatura do corpo a qualquer momento. É chamada de Equação do Morto pois usa-se muito isso com cadáveres, para saber o tempo de morte.

Na Mecânica, temos que, num sistema de molas:

$$F = -kx$$

Porém, temos também

$$F = ma$$

Portanto

$$ma = -kx$$

Agora, a aceleração é a variação da variação de espaço. Desse modo

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Se resolvermos essa equação diferencial, acharemos o espaço de um corpo qualquer durante o movimento com a mola, que é um *MHS*.

Enfim, há uma infinidade de exemplos possíveis. Portanto, faz-se necessário resolver essas equações. Método? Vamos começar!

Método de Euler para solução de Equações Diferenciais

Aqui, nessa parte, só falaremos de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, ou seja, equações que podem ser escritas da forma:

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+a_0y=T(x)$$

Onde y é a função desejada em função da variável x e todos os a_n são constantes independentes. Em outras palavras, nada de coisas como $sen(y)$, ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, etc ou coeficientes não constantes. “Mas por que não veremos um caso geral logo?”, você pode estar se perguntando. *Não existem soluções genéricas para equações diferenciais!* Caso a equação não seja linear ou seus coeficientes não sejam constantes, uma análise muito mais profunda tem que ser feita, sendo de caso a caso (e muitas vezes, nem existem soluções analíticas). As soluções de tais equações só serão alcançadas com métodos numéricos, se isso. O máximo que eu poderia fazer sobre esse assunto seria ensina-lo a ler a equação, e eu já dei a intuição disso acima. Ainda discutiremos alguns casos de lineares com coeficientes não-constantes no final, que são bem comuns, mas ainda não será uma análise muito genérica. Portanto, a partir de agora, pelo menos nessa seção, quando eu escrever “equação diferencial”, já entenda que estou falando de uma linear e coeficientes constantes.

Vamos aqui estudar a técnica de Euler. Essa técnica é tão elementar que seremos capazes de resolver equações diferenciais com Bhaskara. Literalmente.

Primeiro, vamos fazer algumas distinções: as equações diferenciais ditas homogêneas são aquelas nas quais não há termo isento (que não multiplica) da função a qual se deseja saber qual é. Exemplos:

$$3x\frac{d^2y}{dx^2} + sen(x)y = 0$$

$$e^x\frac{dy}{dx} + x^2y = 0$$

Equações diferenciais não-homogêneas são aquelas que tiverem um termo que não multiplica a função. Exemplos:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\frac{dy}{dx} = sen(x)$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} + \frac{d^2y}{dx^2} = 9$$

A técnica de Euler serve para ambos os casos de uma equação diferencial homogênea e não-homogênea. Porém teremos que separar os casos para facilitar nosso trabalho. Acho melhor ver primeiro, fica mais fácil de entender. Primeiro, vamos para as homogêneas.

Euler se propôs a resolver a equação diferencial homogênea de coeficiente constantes genérica:

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + a_{n-3}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \cdots + a_0y = 0$$

Para tal, ele assumiu que a resposta dessa equação poderia ser escrita da forma

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{d_i x}$$

Com c_i e d_i constantes. Como equações diferenciais são operadores lineares $\left(\frac{d}{dx}[f + g] = \frac{d}{dx} f + \frac{d}{dx} g\right)$, se $c_k e^{d_k x}$ e $c_{k+1} e^{d_{k+1} x}$ são soluções, $c_k e^{d_k x} + c_{k+1} e^{d_{k+1} x}$ também é. Então, podemos escrever $y = ce^{dx}$, achar os diversos c e d que resolvem a equação, e somá-los no final, obtendo a solução final $y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{d_i x}$.

Agora, sabemos que:

$$\frac{d^n}{dx^n}[e^{kx}] = k^n e^{kx}$$

Desse modo:

$$a_n d^n ce^{dx} + a_{n-1} d^{n-1} ce^{dx} + a_{n-2} d^{n-2} ce^{dx} + a_{n-3} d^{n-3} ce^{dx} + \cdots + a_0 ce^{dx} = 0$$

$$ce^{dx}(a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + a_{n-2} d^{n-2} + a_{n-3} d^{n-3} + \cdots + a_0) = 0$$

Agora, queremos que essa igualdade seja válida *para todo* x. Como ce^{dx} não será 0 para qualquer x, só resta assumir:

$$a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + a_{n-2} d^{n-2} + a_{n-3} d^{n-3} + \cdots + a_0 = 0$$

Resolvendo isso, temos os coeficientes d_i que dão a função desejada. Portanto, através dessa técnica do Euler, resolver equações diferenciais é como resolver equações algébricas. Observe que o d “cai” o número de vezes que a função for derivada, então podemos até dizer, informal e casualmente, que é como se as derivadas se tornassem uma variável, sendo a ordem da derivada o grau da variável. A equação algébrica se chama “equação característica”.

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + a_{n-3} \frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} + \cdots + a_0 y = 0$$

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{d_i x}$$

$$a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + a_{n-2} d^{n-2} + a_{n-3} d^{n-3} + \cdots + a_0 = 0$$

Vamos pegar um exemplo de uma equação diferencial de 2° ordem:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Pela técnica de Euler:

$$d^2 - 3d + 2 = 0$$

$$d = 1 d = 2$$

Desse modo:

$$y = c_1 e^{1x} + c_2 e^{2x}$$

Pronto, está resolvida a equação diferencial. É bem simples. Note que os coeficientes c_i são coeficientes genéricos. Lembre-se, equações diferenciais por si só encontram famílias de soluções que resolvem o problema: se você quer uma particular para seu problema, aplique condições iniciais / de contorno nessa equação acima, e com isso, encontrará os coeficientes c_i do seu problema. Numa equação de grau n, você deve sempre ter n coeficientes.

“E se uma das raízes for complexa?“, eu posso ouvir você perguntando. Primeiro, lembre-se da identidade de Euler $e^{a+bi} = e^{a}\left(cos(b) + i * sen(b)\right)$. Então, assuma que $a \pm bi$ sejam raízes da sua equação característica (lembre-se, numa equação de coeficientes reais, as raízes complexas vem sempre em pares). Se isso for verdade, então é garantido que $c_k e^{ax} cos(bx) + c_{k+1} e^{ax} sen(bx)$ será a parte da solução da equação diferencial correspondente a essas raízes. A demonstração disso precisa de alguns teoremas avançados de álgebra linear, e honestamente, não é importante. Acho que, considerando a equação de Euler, é fácil acreditar e lembrar deste fato.

“E se uma das raízes tiver multiplicidade dupla?”, eu posso ouvir você questionando. Bem, não vou demonstrar isso aqui, mas se λ for uma raíz com multiplicidade m, então as soluções correspondentes serão $c_k e^{\lambda x} + c_{k+1} x e^{\lambda x} + c_{k+2} x^2 e^{\lambda x} + \cdots + c_{k+m} x^m e^{\lambda x}$. É só multiplicar a função por x. Isso vale igualmente para complexas, também.

Vamos fazer um exemplo:

$$\frac{d^8y}{dx^8} - 10\frac{d^7y}{dx^7} + 46\frac{d^6y}{dx^6} - 136\frac{d^5y}{dx^5} + 232\frac{d^4y}{dx^4} - 160\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

Equação característica:

$$d^8 - 10d^7 + 46d^6 - 136d^5 + 232d^4 - 160d^3 = 0$$

Fatoração:

$$(d-2)^2 * (d-(1+3i)) * (d-(1-3i)) * (d-4) * d^3 = 0$$

Raízes: $2(multiplicidade 2), 1 \pm 3i, 4,0(multiplicidade 3)$.

Solução:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{1x} cos(3x) + c_4 e^{1x} sen(3x) + c_5 e^{4x} + c_6 + c_7 x + c_8 x^2$$

A função exponencial é realmente muito comum para soluções de equações diferenciais homogêneas. Se você não lembrar do método, ou só estiver completamente perdido, chute que $y = be^{ax}$ com a e b coeficientes constantes complexos e vê o que você pode fazer com isso através da equação, tentando achar tais coeficientes.

Agora, temos que solucionar uma equação não homogênea.

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + a_{n-3} \frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} + \cdots + a_0 y = T(x)$$

Para tal, usaremos a seguinte relação:

A solução final, y, dessa equação diferencial, é dada por

$$y = y_{FC} + y_{CP}$$

Onde y_{FC} é a função complementar e y_{CP} um caso particular de solução. Vamos por partes:

A função complementar nada mais é do que a solução da equação como se ela fosse homogênea. Então

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + a_{n-3} \frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} + \cdots + a_0 y = T(x)$$

$$a_n \frac{d^n y_{FC}}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_{FC}}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y_{FC}}{dx^{n-2}} + a_{n-3} \frac{d^{n-3} y_{FC}}{dx^{n-3}} + \cdots + a_0 y_{FC} = 0$$

Já vimos como encontrar a função y_{FC} na parte de solução das equações homogêneas.

Agora, achar um caso particular de solução pode se provar um desafio.

$$a_n \frac{d^n y_{CP}}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_{CP}}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y_{CP}}{dx^{n-2}} + a_{n-3} \frac{d^{n-3} y_{CP}}{dx^{n-3}} + \cdots + a_0 y_{CP} = T(x)$$

Muitas vezes, teremos que chutar.

Acredito que seja mais fácil de entender essa parte através de um exemplo:

Ache um caso particular de solução da equação

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = x$$

Quando digo uma solução particular (ou caso de solução particular, tanto faz), quero dizer uma função qualquer que quando colocada no lugar de y gerará o resultado desejado. Sempre que resolvemos equações diferenciais, adquirimos famílias de soluções, caracterizadas por suas constantes genéricas, e quando impomos uma ou várias condições, temos uma solução particular. A ideia aqui é achar esse caso de solução particular direto.

Como temos que a parte não-homogênea é um polinômio, podemos assumir que a função também será um polinômio de 1 grau acima, pois a função está sendo derivada pelo menos uma vez todas as vezes que aparece.

Assumindo

$$y_{CP} = Ax^2 + Bx + C$$

Temos:

$$\frac{d^2(Ax^2 + Bx + C)}{dx^2} - 3\frac{d(Ax^2 + Bx + C)}{dx} = x$$

$$2A - 6Ax - 3B = x$$

Desse modo

$$\begin{cases} 2A - 3B = 0 \\ -6A = 1 \end{cases}$$

$$A = \frac{-1}{6} B = \frac{-1}{9}$$

E podemos assumir $C = 0$, uma vez que qualquer valor servirá. Só queremos uma solução particular mesmo. Desse modo

$$y_{CP} = \frac{-1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x$$

Saber quais chutes são “certos” é algo que vem com experiência. Porém, a lógica pode ajudar bastante nisso. Se $T(x) = x * sen(x)$, por exemplo, pode ser esperto chutar $(ax + b)sen(x) + (cx + d)cos(x)$. É muito importante que seu chute seja coerente.

É fácil de ver o porquê a solução final ser dada por $y_{FC} + y_{CP}$, já que a derivação é uma operação linear. Assim, basta separar os termos e verificar a igualdade.

Você pode estar se perguntando “Mas achar essa parte complementar não é meio inútil? Ao achar um caso particular, já achamos uma solução”. Esse é justamente o problema: você achou *uma* solução. Quando resolvemos uma equação diferencial, porém, não estamos querendo uma solução apenas, queremos todas as possíveis! Como já mencionei, queremos *famílias de soluções* inicialmente. Desse modo, devemos considerar o caso mais genérico possível antes de aplicar nossas condições iniciais / de contorno, e, portanto, considerar a solução da parte complementar é essencial.

Resolvendo alguns exemplos

Vamos recapitular as partes importantes:

- Veja a equação diferencial linear de coeficientes constantes:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + a_{n-3} \frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} + \cdots + a_0 y = T(x)$$

- Primeiro, pegue sua parte complementar:

$$a_n \frac{d^n y_{FC}}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_{FC}}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y_{FC}}{dx^{n-2}} + a_{n-3} \frac{d^{n-3} y_{FC}}{dx^{n-3}} + \cdots + a_0 y_{FC} = 0$$

- Resolva agora a equação algébrica:

$$a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + a_{n-2} d^{n-2} + a_{n-3} d^{n-3} + \cdots + a_0 = 0$$

- Você terá, com isso, que:

$$y_{FC} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{d_i x}$$

Onde d_i são as raízes da equação algébrica que você acabou de resolver e c_i são coeficientes genéricos.

- Agora, pegue a equação original e procure uma solução particular dela:

$$a_n \frac{d^n y_{CP}}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_{CP}}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y_{CP}}{dx^{n-2}} + a_{n-3} \frac{d^{n-3} y_{CP}}{dx^{n-3}} + \cdots + a_0 y_{CP} = T(x)$$

- Sua resposta geral será:

$$y = y_{FC} + y_{CP}$$

Pronto. Se você tiver condições iniciais, pode aplica-las na y encontrada aqui e encontrar os coeficientes c_i genéricos mencionados.

Vamos resolver uns exemplos?

No nosso primeiro modelo populacional:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Temos a equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0$$

A equação algébrica fica

$$d - k = 0$$

Trivialmente, $d = k$. Portanto:

$$P = ce^{kt}$$

Na Equação de Newton de variação de temperatura:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A)$$

Temos a equação diferencial:

$$\frac{dT}{dt} - kT = -kT_A$$

Parte complementar:

$$\frac{dT_{FC}}{dt} - kT_{FC} = 0$$

$$T_{FC} = ce^{kt}$$

Solução particular:

$$\frac{dT_{FP}}{dt} - kT_{FP} = -kT_A$$

Note que a parte do lado direito da equação opera como um polinômio de grau 0, e nós temos a função sendo derivada 1 vez num termo e nenhuma no outro. É fácil de ver, então, que uma solução particular é $T_{FP} = T_A$. Então:

$$T = T_A + ce^{kt}$$

E se os coeficientes da Equação Diferencial não forem constantes?

Lembrando, aqui ainda mantemos que equações diferenciais são lineares. Não-linearidade é completamente fora do nosso escopo.

Bem, temos equações que são, como chamamos, elementarmente integráveis. Vamos começar com uma equação diferencial simples:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y$$

Note que o coeficiente de y não é constante, é uma $f(x)$ qualquer. Agora, nós vamos ajeitar isso antes de integrar. Como? Arrumando os termos! Escrevemos:

$$\frac{1}{y}dy = f(x)dx$$

Ou seja, deixamos o que tem y de um lado, o que tem x do outro.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int f(x)dx$$

Perceba que agora é algo que sabemos resolver, pois

$$\int \frac{1}{y}dy = ln(y) + c$$

Portanto, escreve-se

$$ln(y) = \int f(x)dx + c$$

Temos, desse jeito

$$y = e^{\int f(x)dx+c}$$

Como $e^{a+b} = e^a e^b$ e e^c continua constante, escrevo

$$y = ce^{\int f(x)dx}$$

O método que vimos acima é simplesmente uma integração. Agora que temos esse resultado, podemos partir para as não-elementarmente integráveis, mas ainda de ordem 1. Quando eu digo ordem 1, me refiro ao fato de que só existe a primeira derivada, assim como em equações algébricas temos apenas x nas de 1° grau.

Essas são equações do tipo:

$$(x^2 + 3x)\frac{dy}{dx} + 9y = 10$$

$$e^{7x}\frac{dy}{dx} + sen(-3x)y = ln(x)$$

Genericamente:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Não é necessário algo multiplicando $\frac{dy}{dx}$, pois se tiver é só dividirmos por isso e caímos nesse caso acima apresentado.

Para resolver, comecemos multiplicando tudo por uma função $h(x)$, que ainda não vamos definir:

$$\frac{dy}{dx}h(x) + h(x)p(x)y = h(x)q(x)$$

Lembrando que:

$$\frac{d}{dx}[fg] = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

Assuma que:

$$\frac{dh}{dx} = h(x)p(x)$$

Se isso for verdade, teremos que:

$$\frac{d}{dx}[yh(x)] = h(x)q(x)$$

Então:

$$y = \frac{1}{h(x)}\left(\int h(x)q(x)dx + c_1\right)$$

Mas está tudo em função de $h(x)$, função que não pertence ao problema original. Não pode ficar assim. Porém, podemos calcular $h(x)$ pela condição que demos acima:

$$\frac{dh}{dx} = h(x)p(x)$$

Que é uma equação que sabemos resolver, elementarmente integrável! Portanto:

$$\frac{1}{h}dh = p(x)dx$$

$$h(x) = c_2 e^{\int p(x)dx}$$

Agora, substituímos isso na outra equação, e temos

$$y = \frac{1}{c_2 e^{\int p(x)dx}}\left(\int c_2 e^{\int p(x)dx} q(x)dx + c_1\right)$$

Arrumando e juntando constantes, teremos

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + c\right)$$

Veja como só precisamos resolver essas integrais simples e teremos a função. De início, isso pode parecer assustador, mas não se preocupe! Nosso trabalho será muito simples.

Vamos agora resolver, finalmente, uma equação diferencial de verdade, como exemplo de tudo que vimos até agora

Resolver:

$\frac{dy}{dx} + cos(x)y = 2cos(x)$com $y(0) = 6$.

Temos, portanto:

$$p(x) = cos(x)q(x) = 2cos(x)$$

Então, como acabamos de ver:

$$y = e^{-\int cos(x)dx}\left(\int e^{\int cos(x)dx} 2cos(x)dx + c\right)$$

Temos o resultado final:

$$y = 2 + ce^{-sen(x)}$$

Agora, vamos para a condição inicial: quando $x = 0$, $y = 6$. Portanto

$$6 = 2 + ce^{-sen(0)}$$

$$c = 4$$

Desse modo:

$$y = 2 + 4e^{-sen(x)}$$

Resolvemos nossa primeira equação diferencial com coeficientes não constantes completa. Na prática, não fique decorando o caso genérico e já pronto, escrito como $y = e^{-\int p(x)dx}(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + c)$; se lembre da técnica:

multiplicar por uma função $h(x)$ tal que $\frac{dh}{dx} = h(x)p(x)$, juntar as parcelas em uma única derivada de produto, e depois resolver.

Vamos para o próximo: um método para resolver *qualquer* equação diferencial linear, as Transformadas de Laplace.

As Transformadas de Laplace surgiram quando Laplace estudava essa mesma técnica:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + c\right)$$

Ele estava estudando as implicâncias de se alterar as funções $p(x)$ e $q(x)$.

Nesses estudos, ele chegou em sua proposta.

Laplace propôs então a Transformada

$$L[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

Qual a proposta? Ao fazer essa integral, você passa sua função, que está no domínio x, para um novo domínio, o domínio s, que é muito mais fácil de trabalhar. Vamos pegar alguns exemplos, e construir já uma coleção.

$$f(x) = 1$$

$$L[1] = \int_0^\infty e^{-sx}1dx$$

O resultado será

$$L[1] = \frac{1}{s}$$

$$f(x) = x$$

$$L[x] = \int_0^{\infty} e^{-sx} x dx$$

O resultado será

$$L[x] = \frac{1}{s^2}$$

$$f(x) = x^2$$

$$L[x^2] = \int_0^{\infty} e^{-sx} x^2 dx$$

O resultado será

$$L[x^2] = \frac{2}{s^3}$$

Podemos, dessa forma, generalizar:

$$L[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Assim está feito a Transformada de Laplace dos polinômios.

Isso pode ser feito para todas as funções. Vamos agora ver os resultados já prontos e tabelados:

$$L[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$L[e^{ax}] = \frac{1}{s-a}$$

$$L[sen(ax+b)] = \frac{acos(b) + ssen(b)}{s^2 + a^2}$$

$$L[cos(ax+b)] = \frac{scos(b) - asen(b)}{a^2 + s^2}$$

$$L[x^n e^{ax}] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

Enfim, diversas funções já foram mapeadas e suas transformadas podem ser encontradas em diversos lugares.

Bem, uma vez que tenhamos todas as funções tabeladas e tudo mais, podemos começar a brincar com funções derivadas. Por que não calcular a Transformada de Laplace da derivada de uma função?

$$L\left[\frac{df}{dx}\right] = \int_0^\infty e^{-sx}\frac{df}{dx}dx$$

Resolvendo:

$$L\left[\frac{df}{dx}\right] = sL[f(x)] - f(0)$$

Se fizermos para a segundo derivada?

$$L\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right] = s^2L[f(x)] - sf(0) - \frac{df}{dx}(0)$$

Já podemos generalizar:

$$L\left[\frac{d^nf}{dx^n}\right] = s^nL[f(x)] - \sum_{i=1}^{n-1} s^{n-i}\frac{d^{i-1}f}{dx^{i-1}}(0)$$

Vamos aplicar isso na solução de equações diferenciais.

Resolva:

$$\frac{dy}{dx} + y = 0y(0) = 1$$

Vamos pegar a equação e aplicar as Transformadas de Laplace nela:

$$L\left[\frac{dy}{dx}\right] + L[y] = L[0]$$

Tem-se, pelas tabelas:

$$sL[y] - y(0) + L[y] = 0$$

Como temos que

$$y(0) = 1$$

Portanto

$$L[y] = \frac{1}{s+1}$$

Olha nas tabelas de novo, temos o resultado

$$y = e^{-x}$$

Perceba a simplicidade para se chegar no resultado.

Vamos para um outro caso:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 3e^{3x} y(0) = 0 \frac{dy}{dx}(0) = 1$$

Temos:

$$L\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] + L\left[-3\frac{dy}{dx}\right] = L[3e^{3x}]$$

$$s^2L[y] - sy(0) - \frac{dy}{dx}(0) - 3\big(sL[y] - y(0)\big) = 3\frac{1}{s-3}$$

Isolando $L[y]$ e substituindo pelos valores das condições iniciais

$$L[y] = \frac{1}{(s-3)^2}$$

Olhando na tabela, tem-se

$$y = xe^{3x}$$

Realmente, a técnica de Transformadas de Laplace serve para resolver qualquer equação diferencial. Basta aplicar a transformada, olhar na tabela, isolar $L[y]$, olhar na tabela de novo, e tem-se o resultado. Como podemos observar, e você pode fazer mais testes por si só, é muito mais fácil trabalhar no universo s que no universo x. Só, realmente, precisa da tabela, você não vai ficar fazendo $L[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$toda vez que for resolver uma equação diferencial. Mas, uma vez que isso não seja problema, as Transformadas de Laplace podem facilitar e muito a resolução de equações diferenciais.